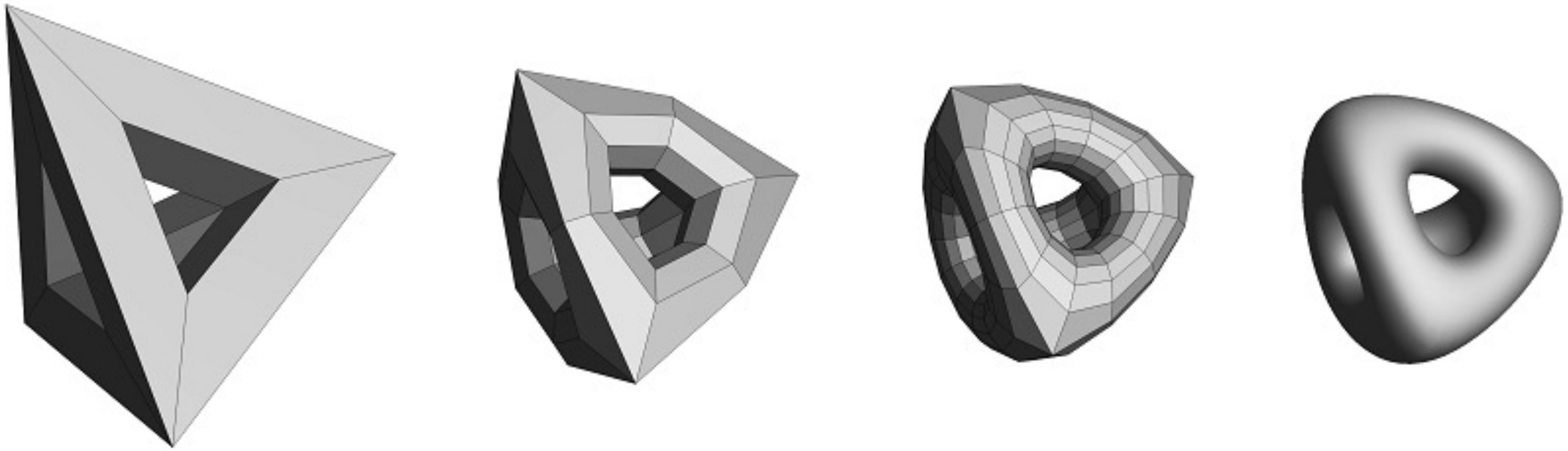
コンピュータグラフィクス論

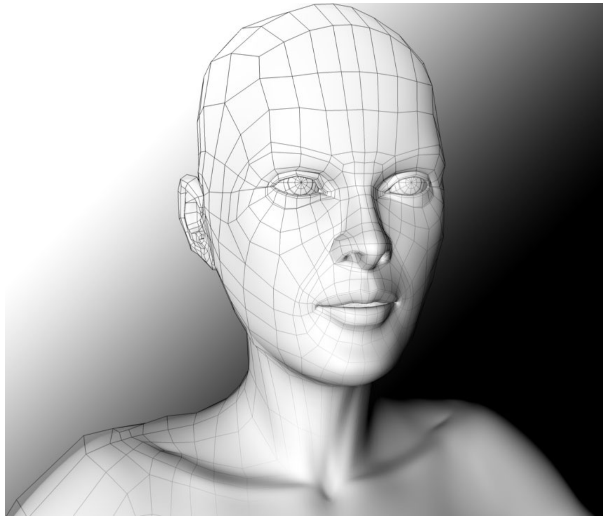
– モデリング(2) –

2021年4月22日

高山 健志

サブディビジョン曲面



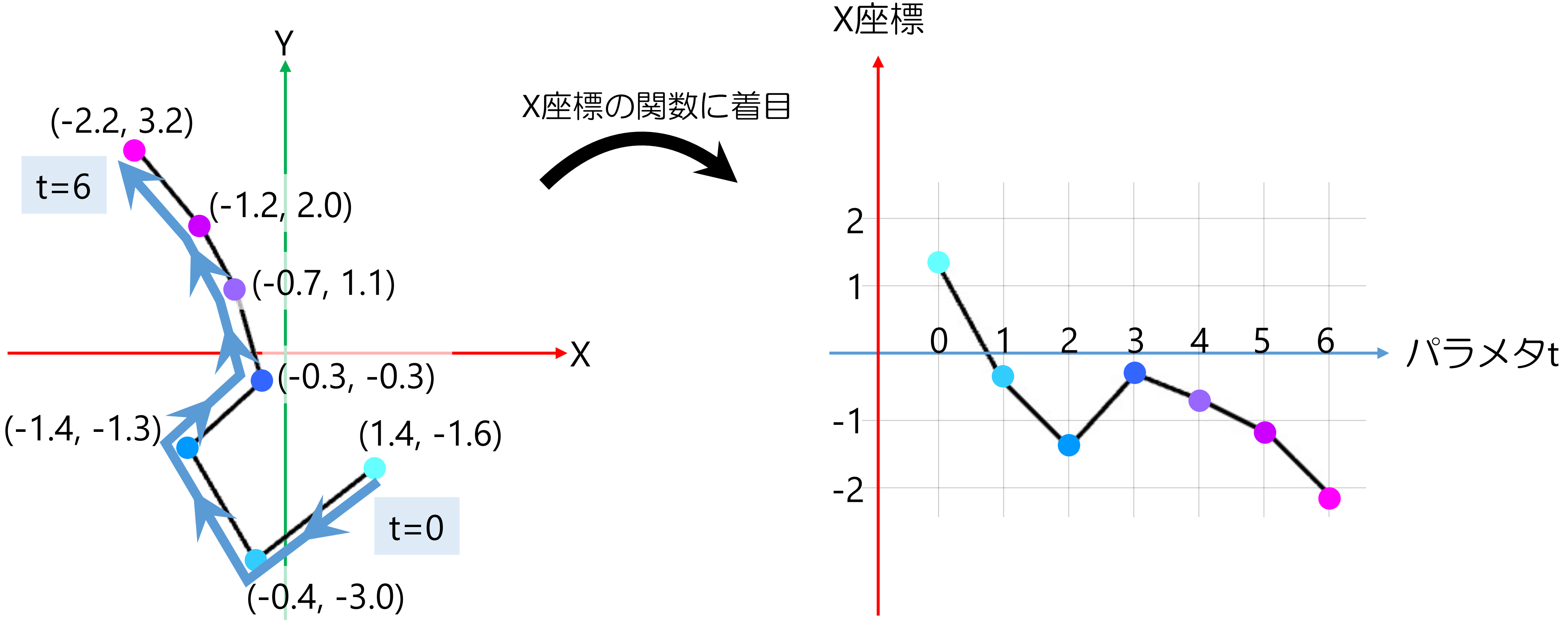


その理論的土台となる

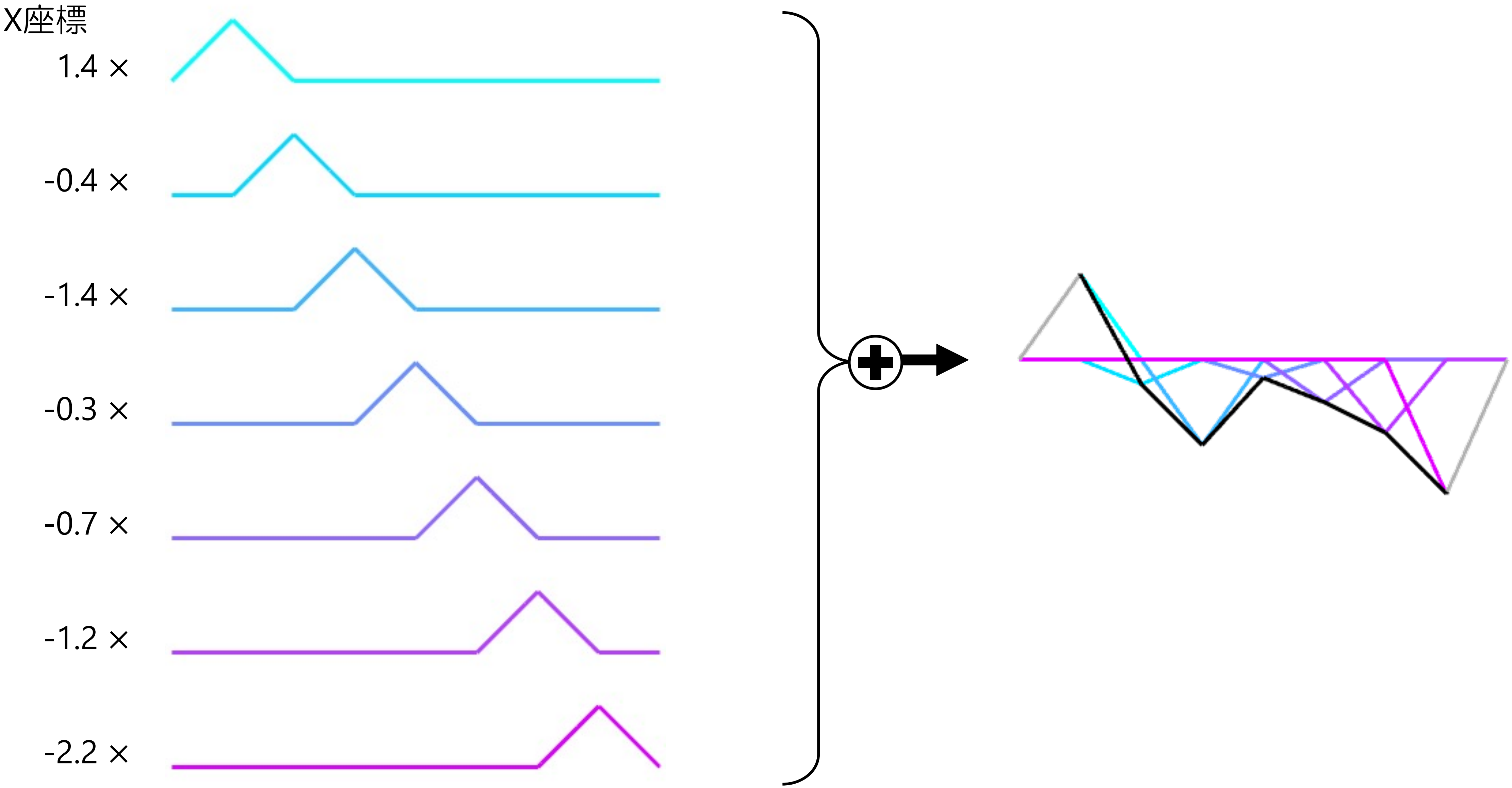
Bスプライン曲線

Basis, 基底

例：2Dの折れ線を関数として表現

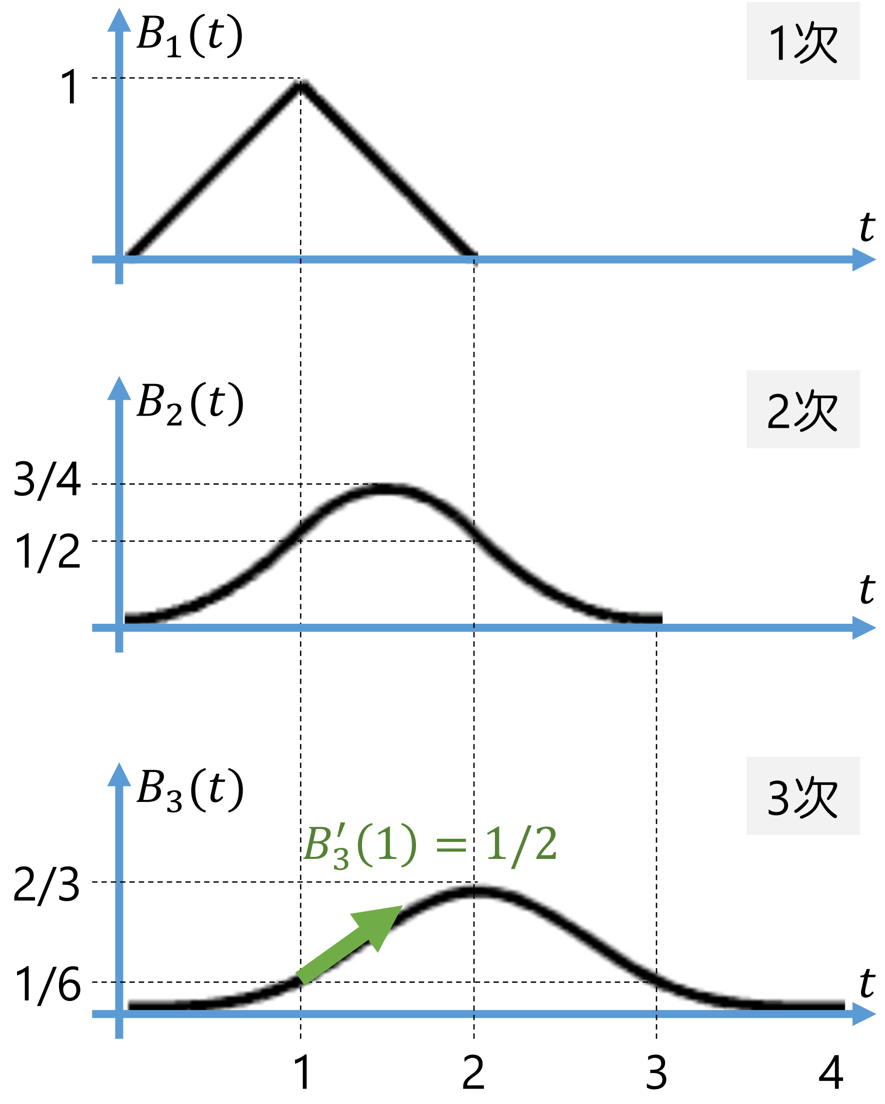


1次の基底関数を用いた折れ線の表現

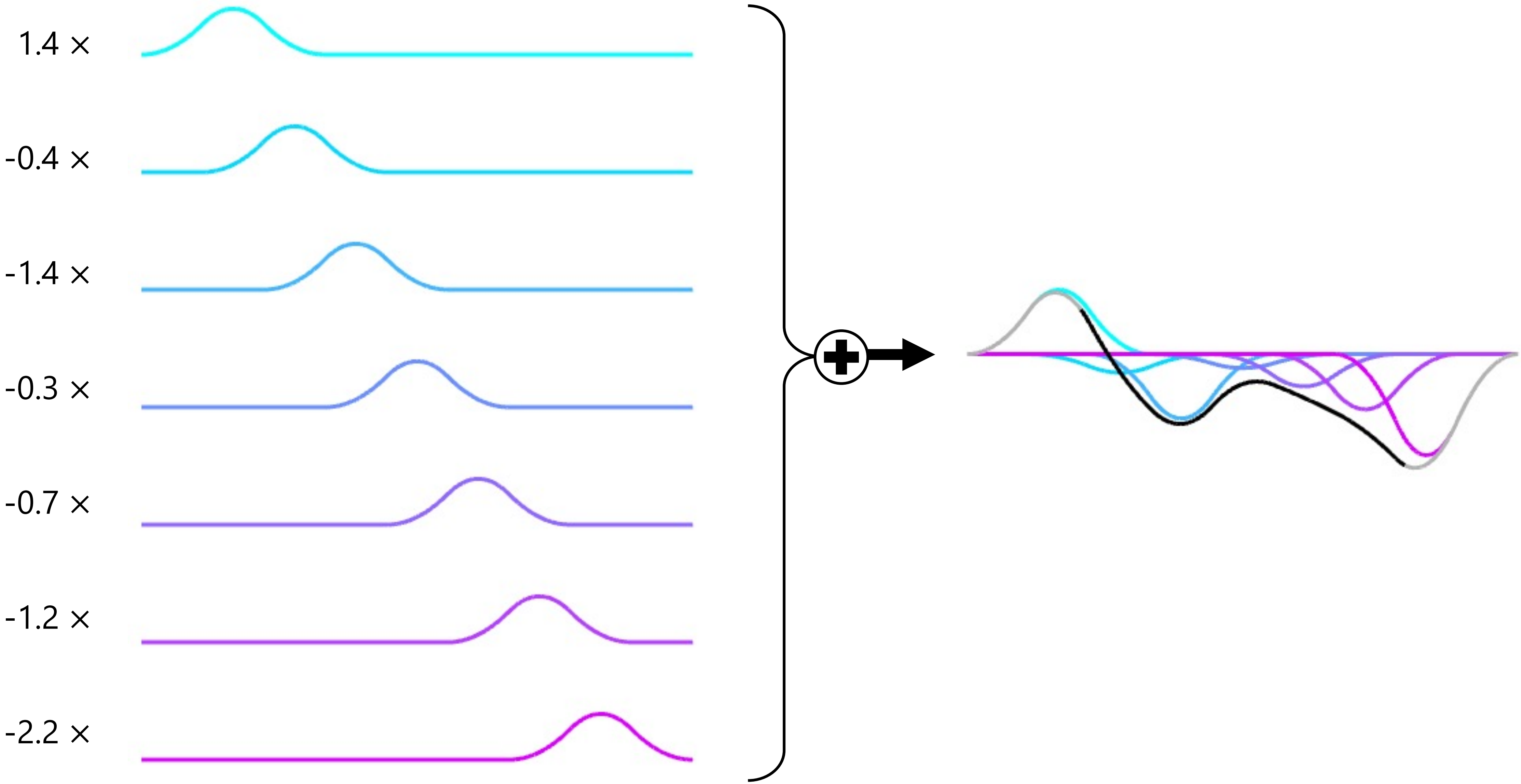


de Boor の n次基底関数

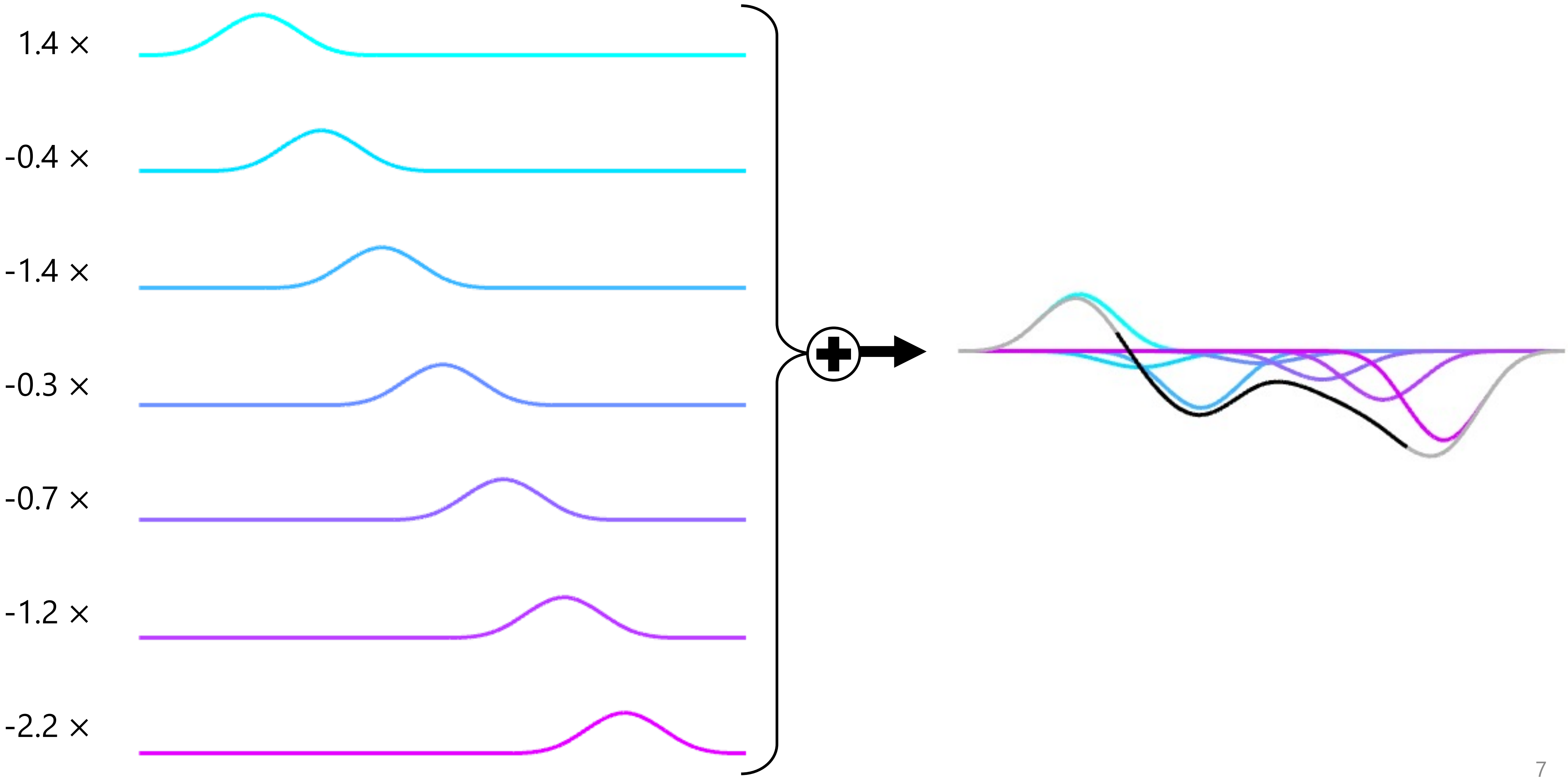
- 再帰的な定義：
  - $B_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
  - $B_n(t) = \frac{t}{n} B_{n-1}(t) + \frac{n+1-t}{n} B_{n-1}(t-1)$
- 性質：
  - n次区分多項式
  - [0, n+1] の外では常にゼロ (local support)
  - C^{n-1}連続



2次の基底関数を使う ➔ 2次Bスプライン



3次の基底関数を使う ➔ 3次Bスプライン



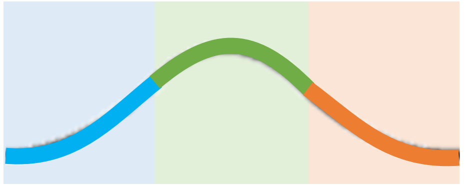
基底関数の大事な性質：partition-of-unity

- Bスプライン曲線のX座標： $x(t) = \sum_i x_i B_n(t-i)$

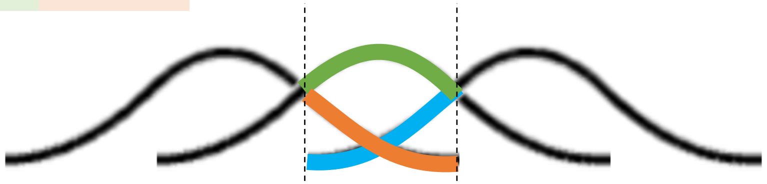
- すべての制御点の座標 x_i を定数 c だけ平行移動することを考える：
  - $x(t) = \sum_i (x_i + c) B_n(t-i)$

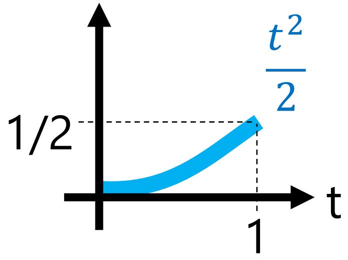
    $$= \sum_i x_i B_n(t-i) + c \underbrace{\sum_i B_n(t-i)}_{1}$$

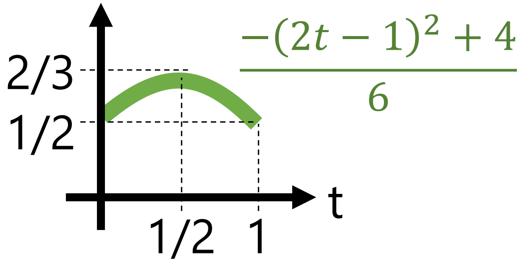
  - partition-of-unityを満たせば、曲線全体も c だけ平行移動したものになる

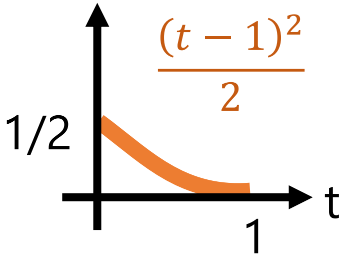


2次の場合

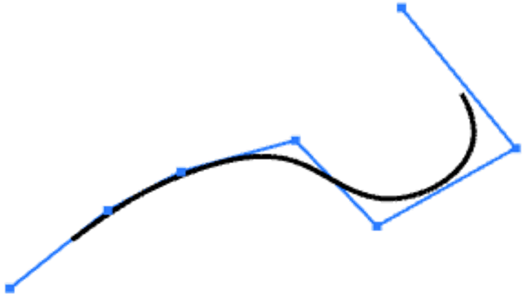








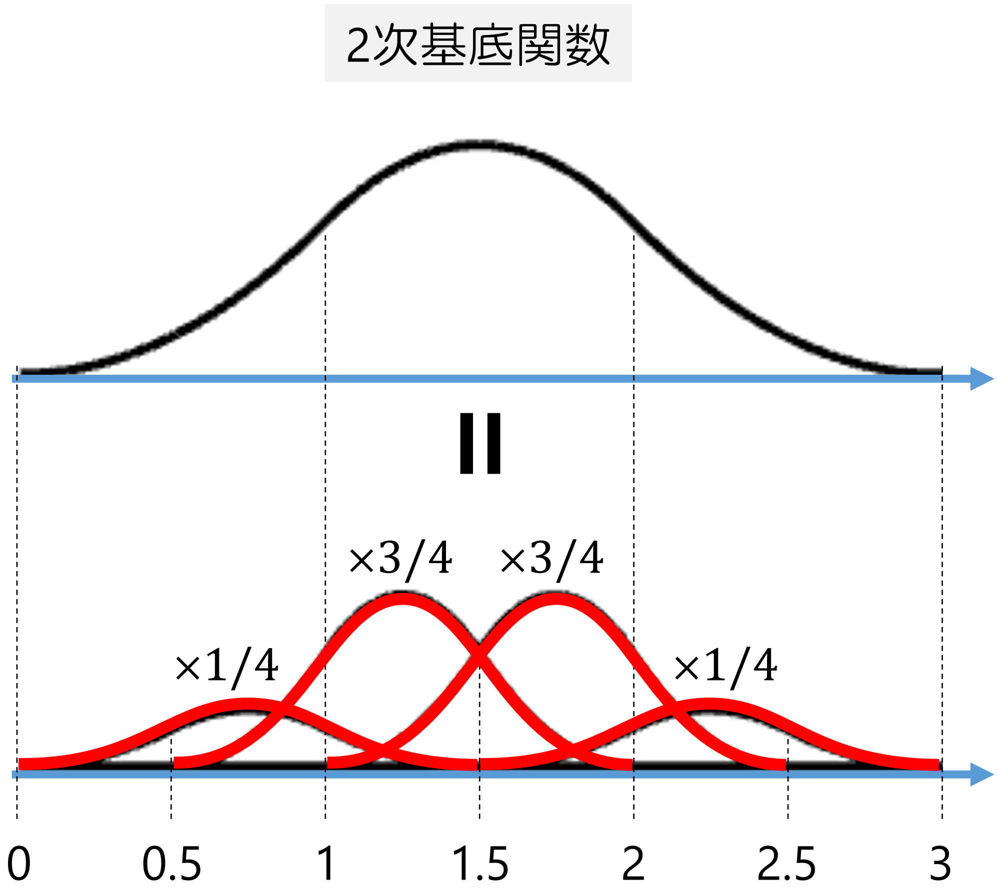
3次Bスプライン曲線と3次Catmull-Rom曲線

		
数学的な表現	区分3次曲線	区分3次曲線
定義の方法	3次基底関数の線形結合	$t = t_k$における座標値を指定すると、そこでの微分値を自動設定 各区間をエルミート補間
制御点を通る？	通らない	通る
区間境界の連続性	C^2連続	C^1連続

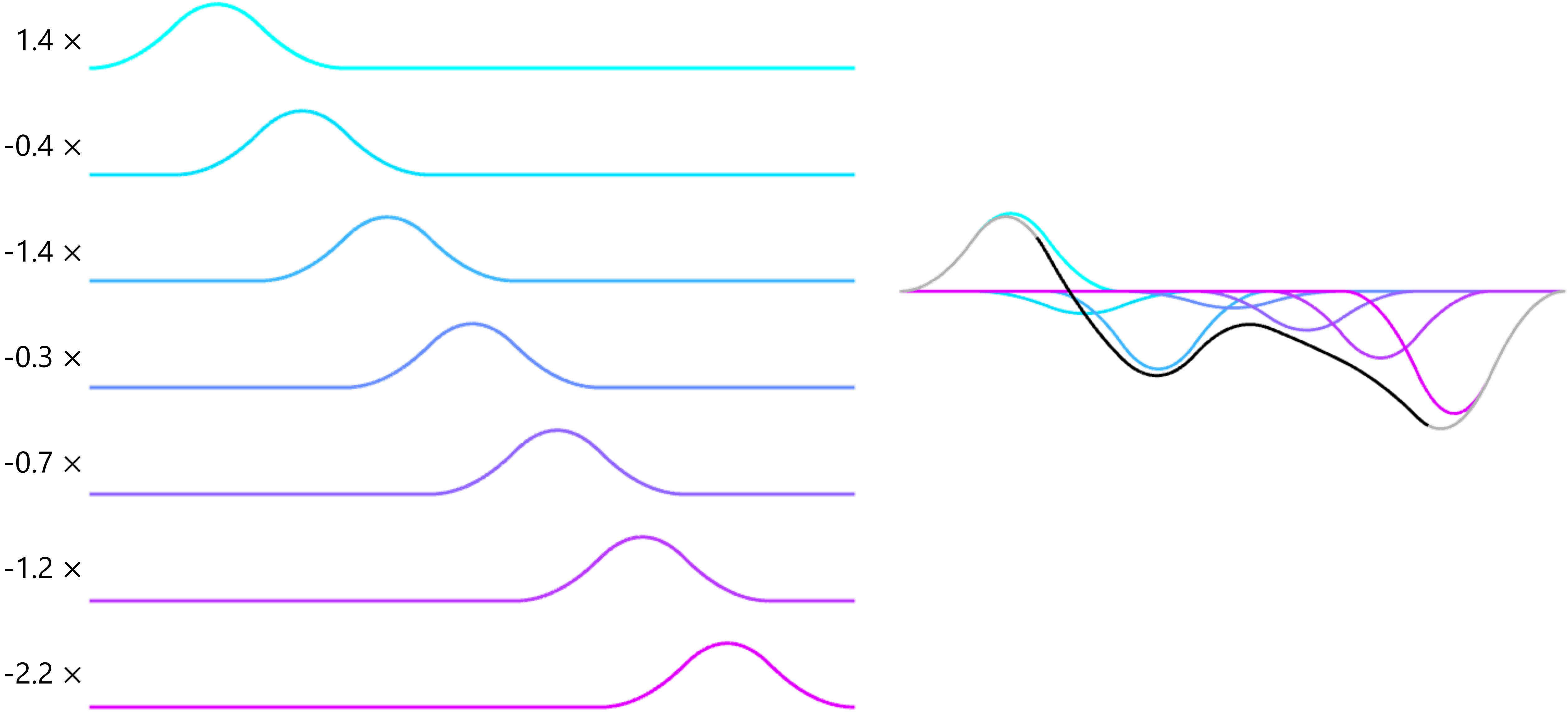
Bスプラインからサブディビジョンへ

基底関数のもう一つの重要な性質

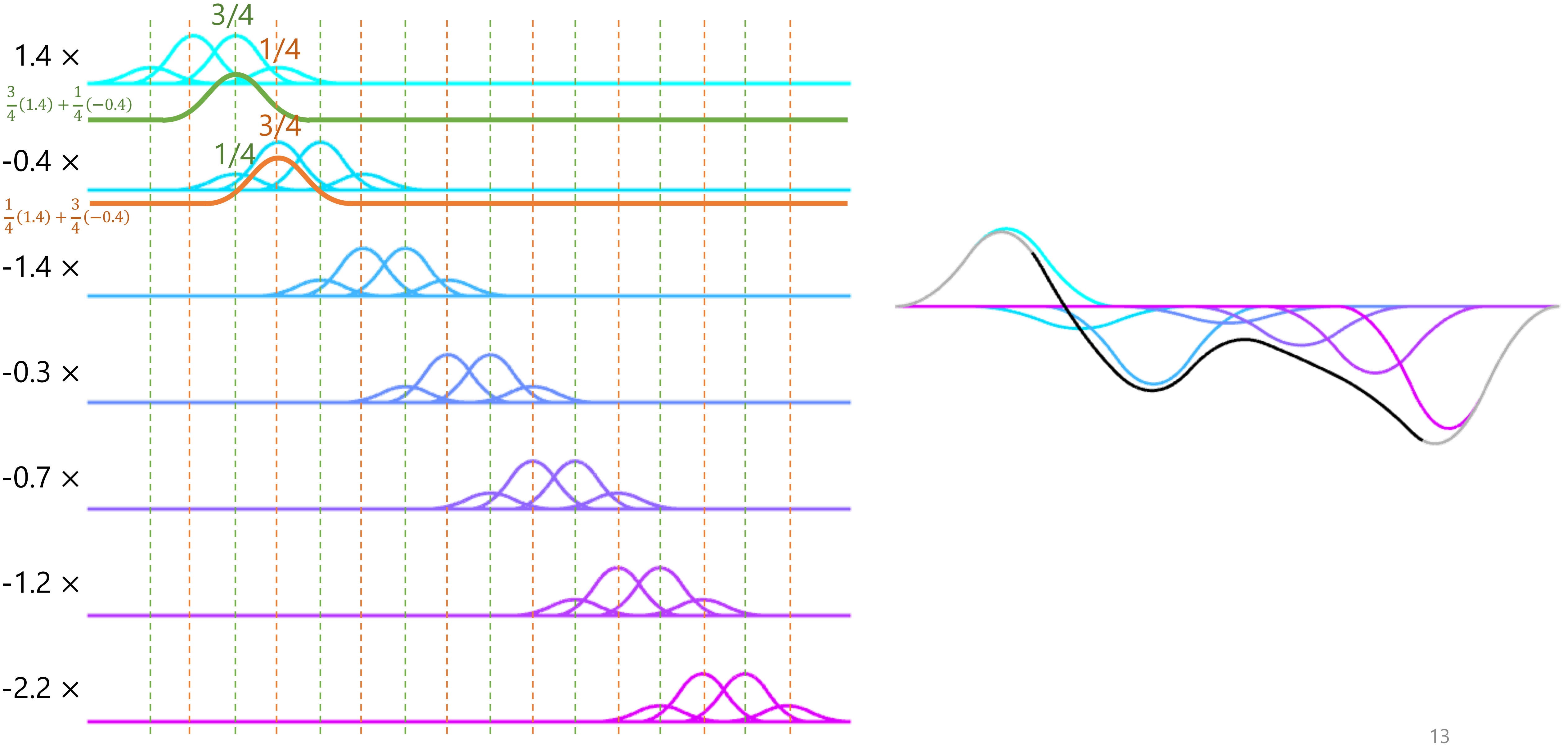
- 同じ基底関数の local support を半分にしたものの重み付け和に分解可能



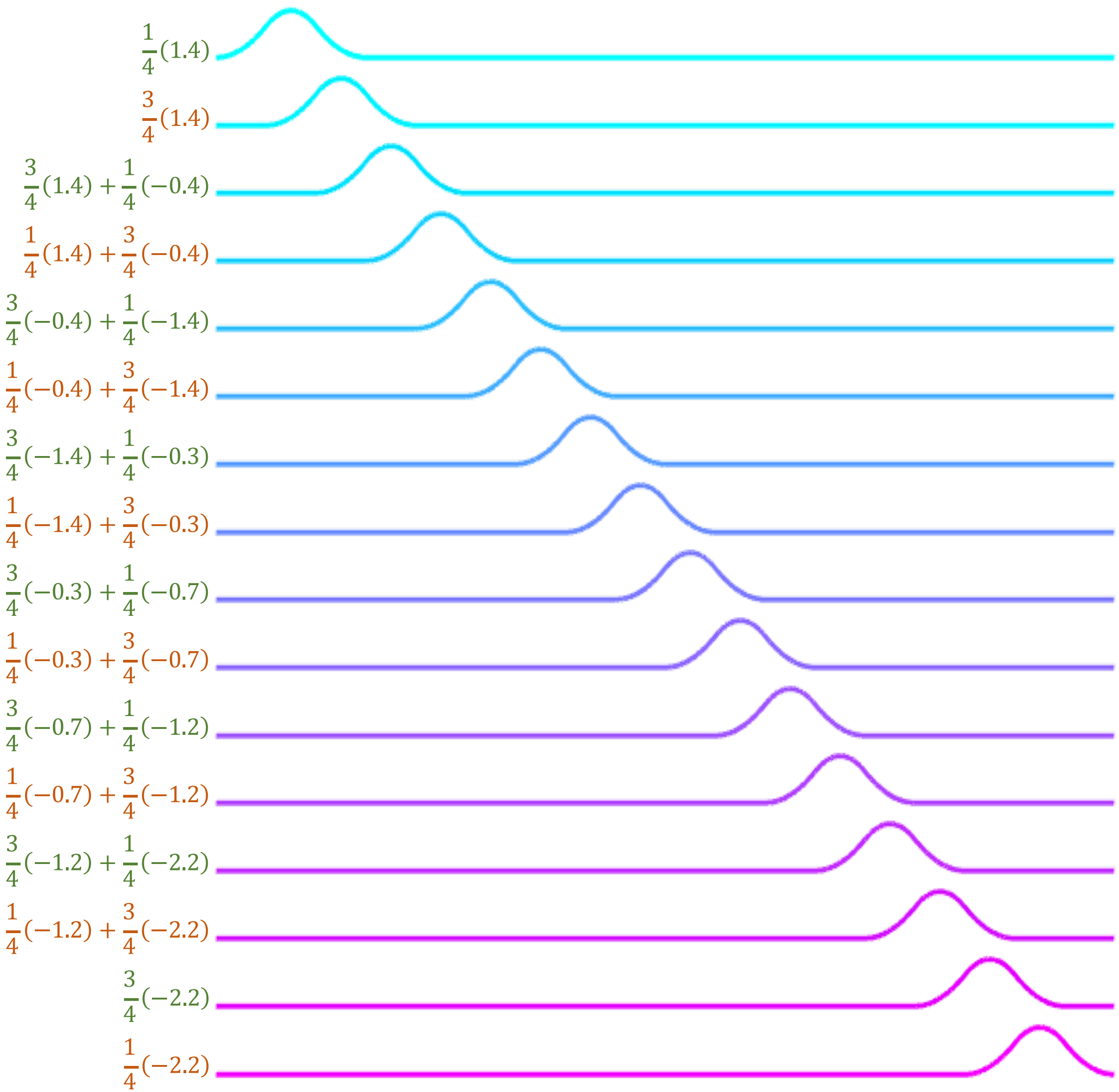
2次Bスプライン曲線の分割

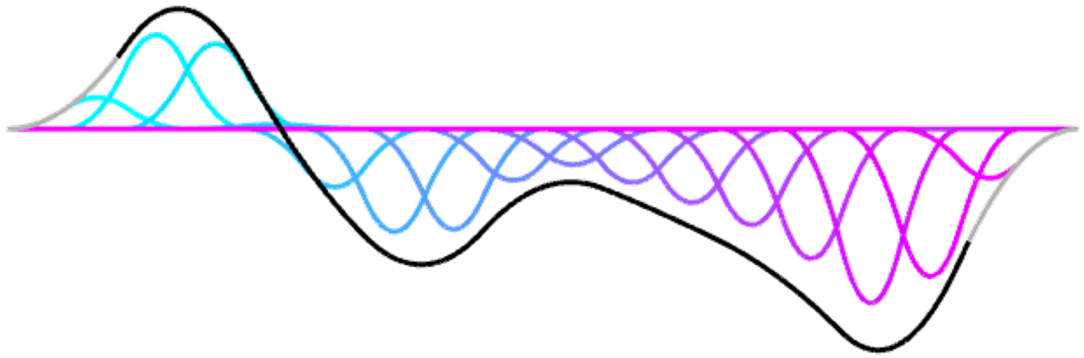


2次Bスプライン曲線の分割

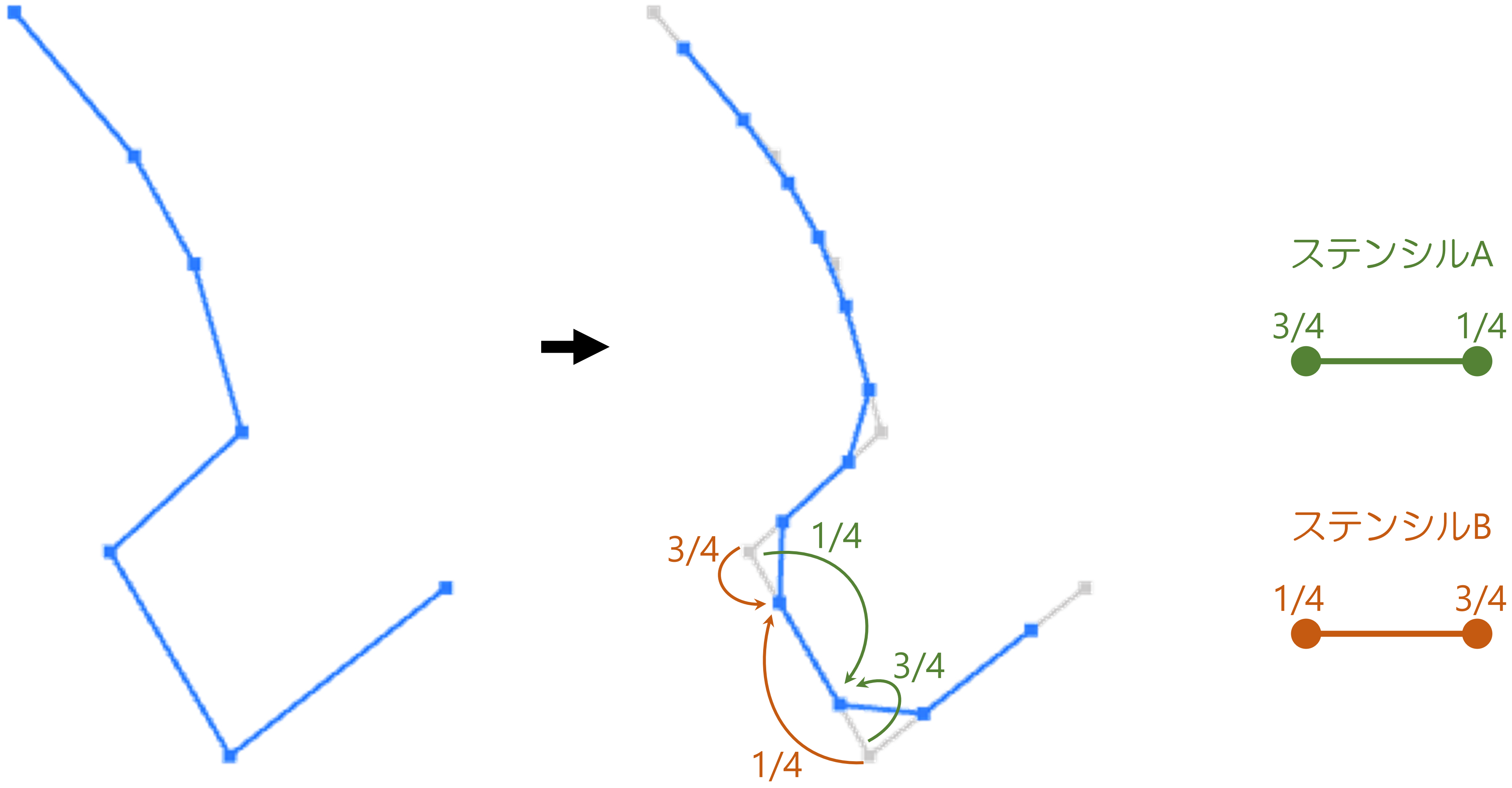


2次Bスプライン曲線の分割



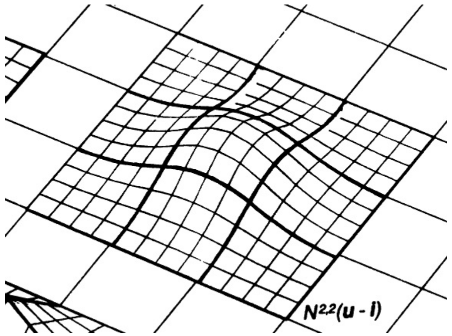


サブディビジョンによる2次曲線の生成

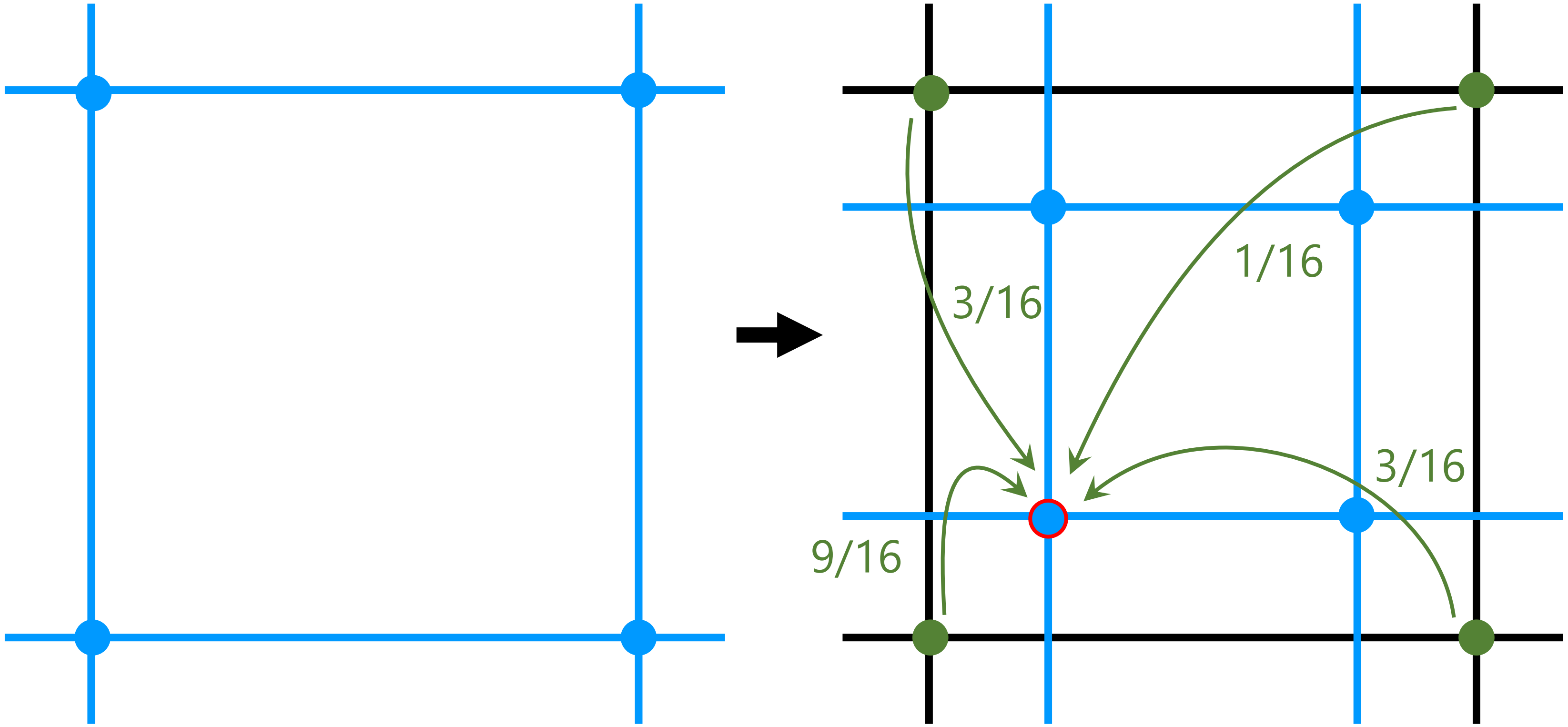


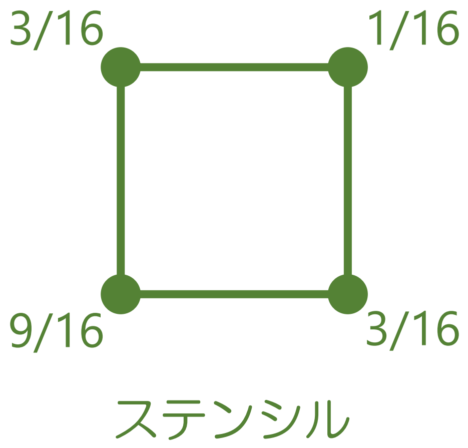
- 各頂点を、2個の頂点に分裂させる
  (= 各エッジについて、2個の頂点を生成)

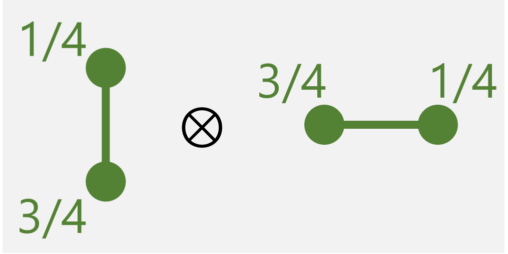
サブディビジョンによる 2次曲面の生成



双2次基底関数
$B_{2,2}(s,t) = B_2(s)\,B_2(t)$

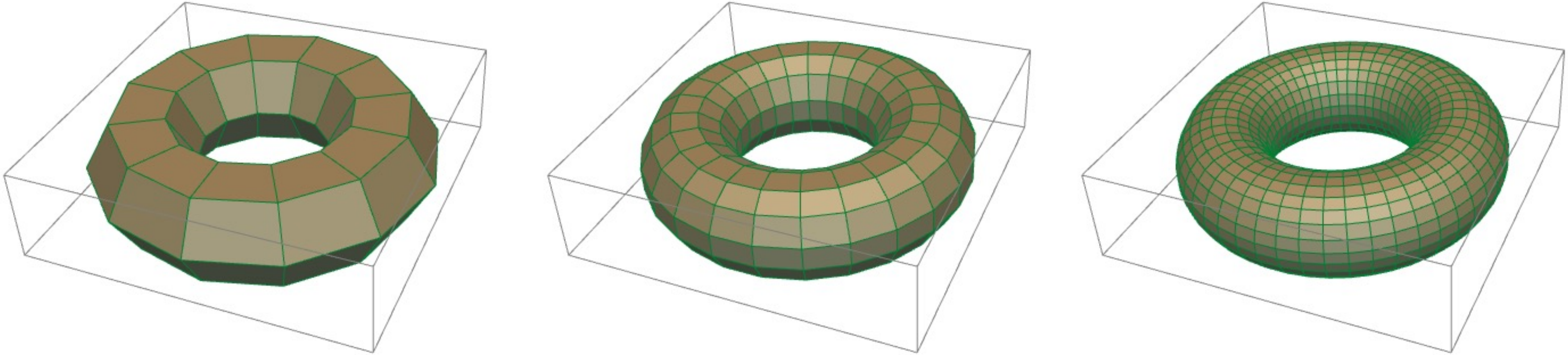




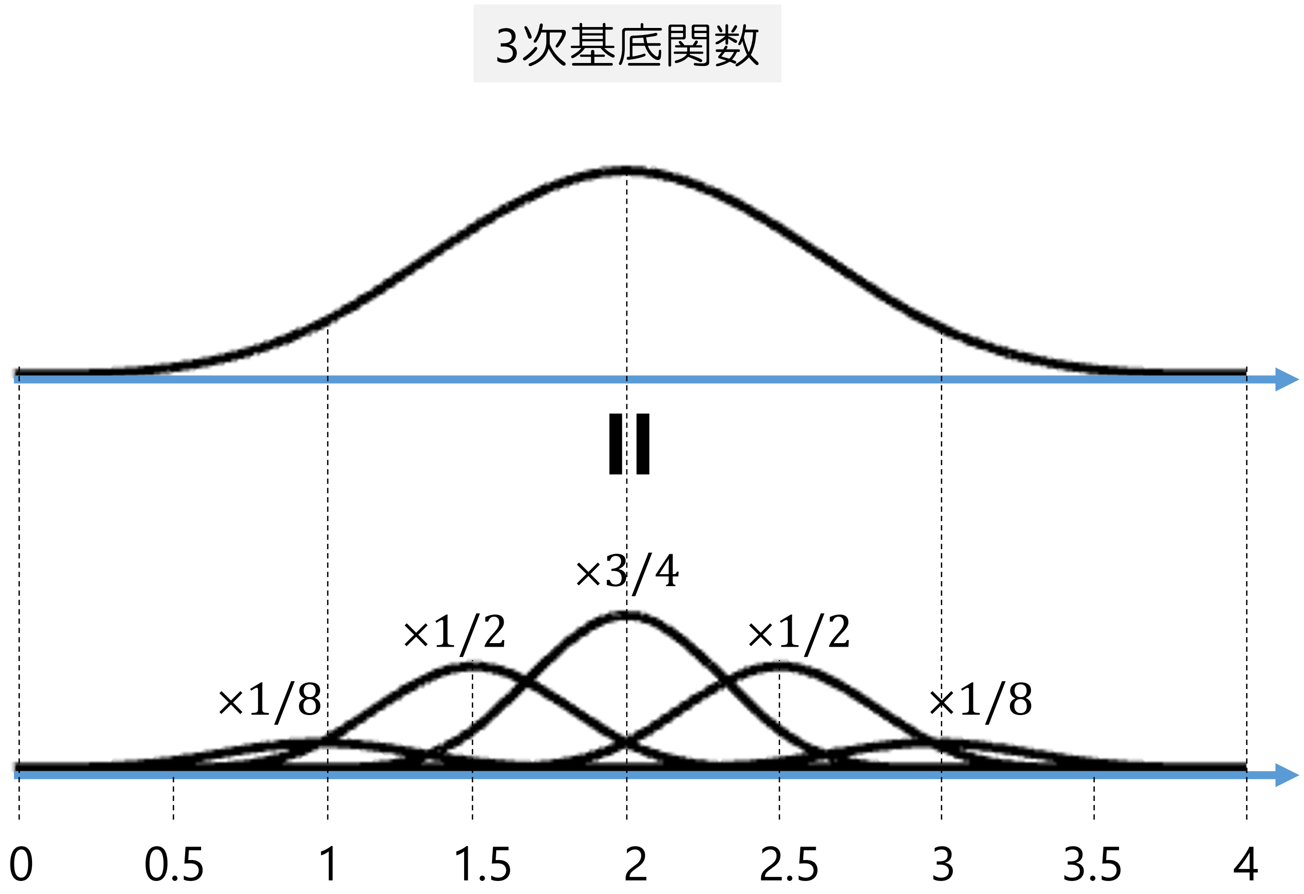


- 各頂点を、4個の頂点に分裂させる
(= 各面について、4個の頂点を生成)

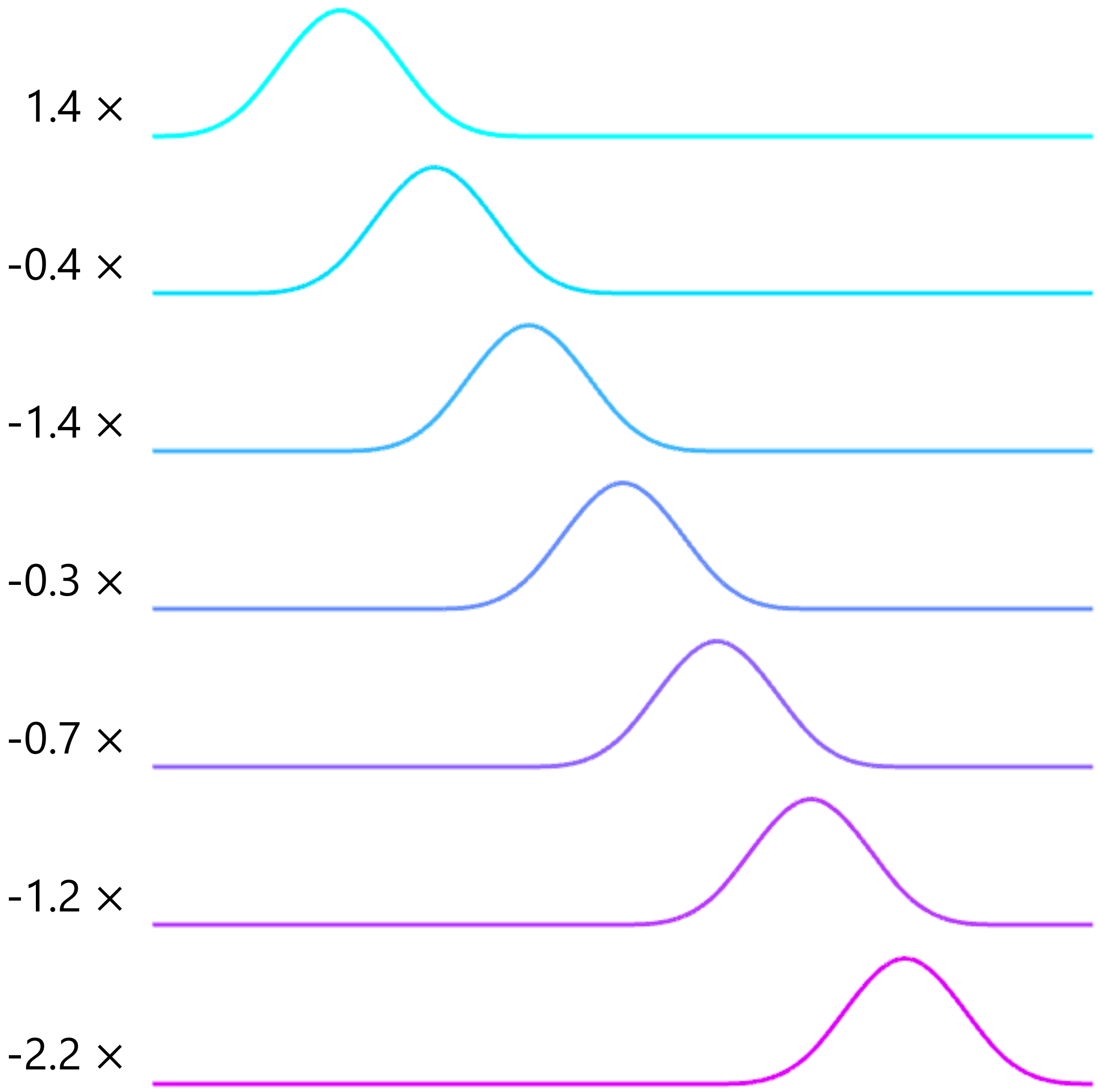
トーラス形状への適用結果

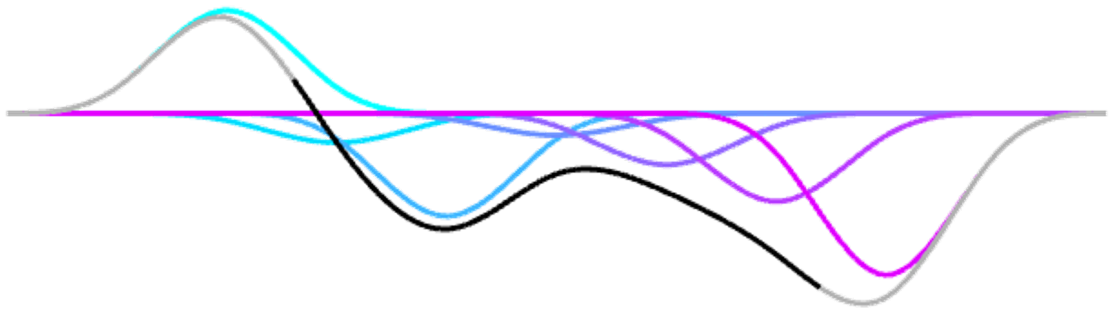


3次Bスプラインの場合

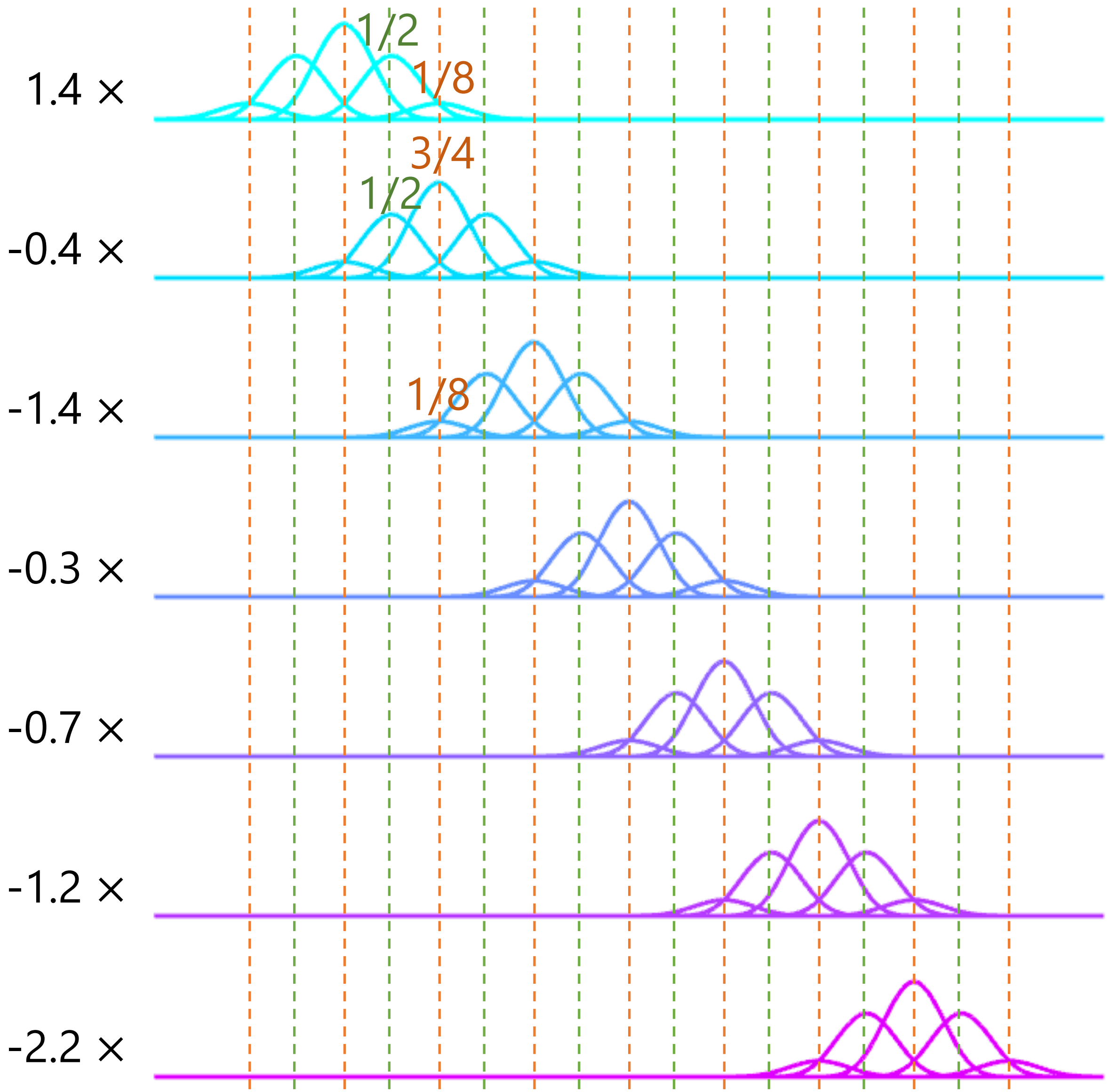


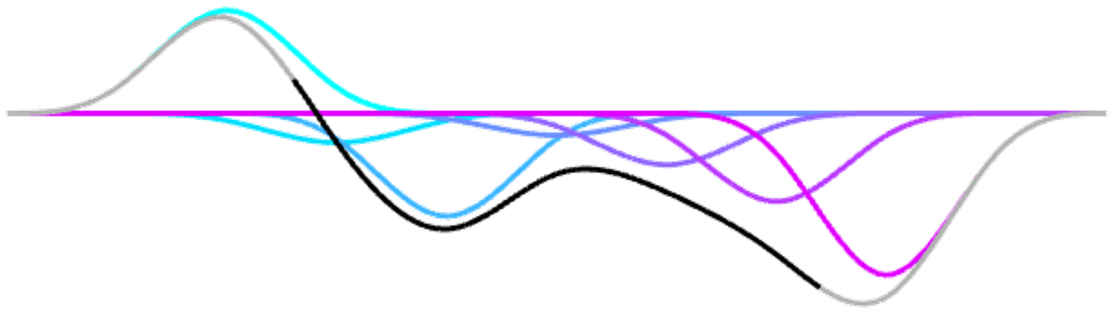
3次Bスプライン曲線の分割



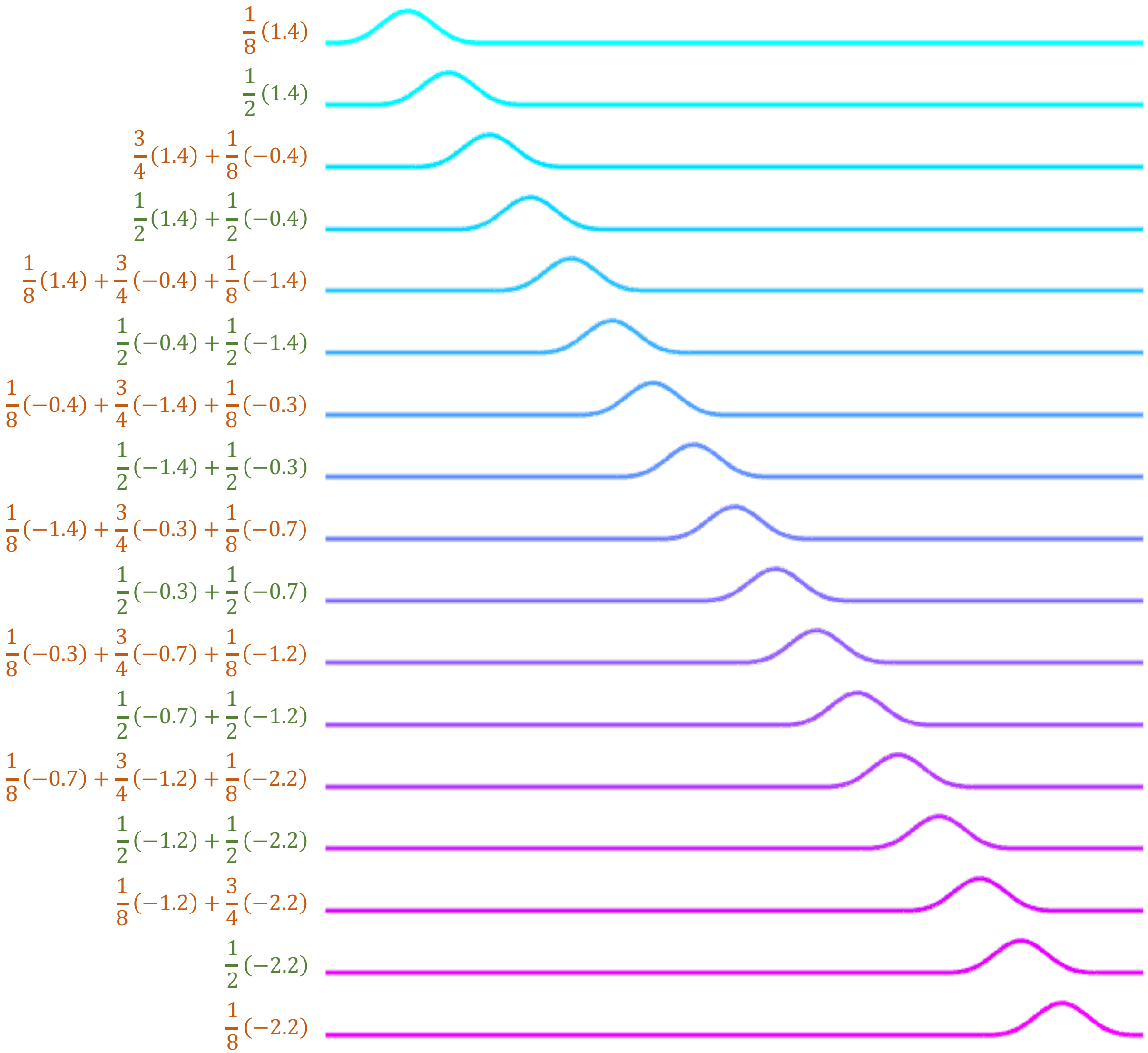


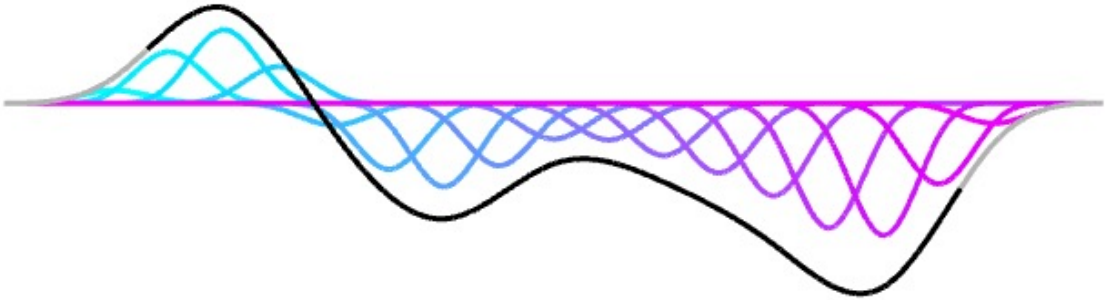
3次Bスプライン曲線の分割



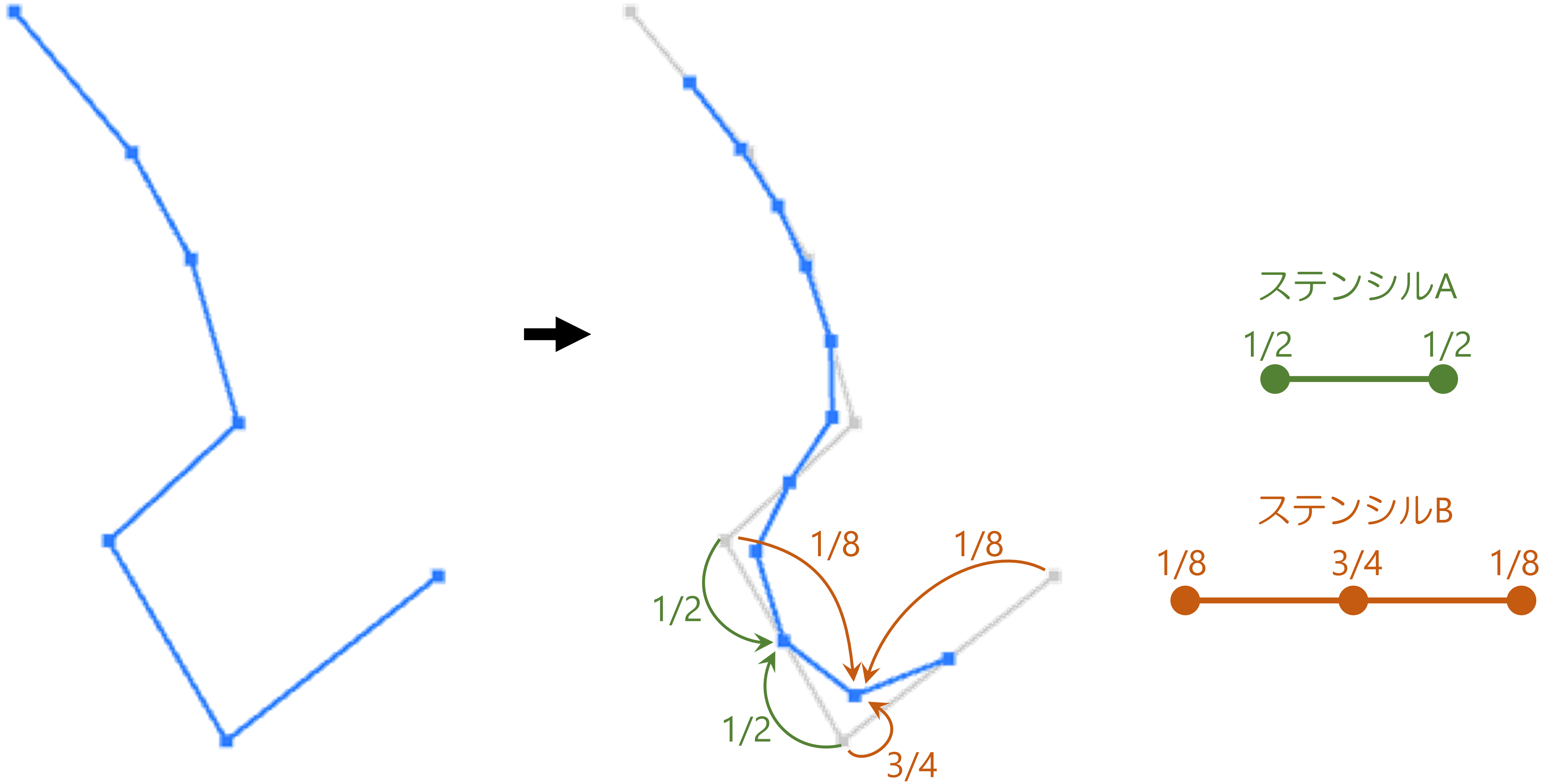


3次Bスプライン曲線の分割



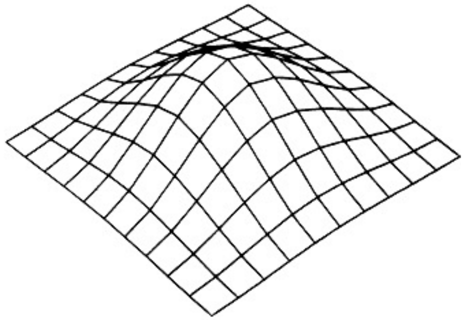


サブディビジョンによる3次曲線の生成

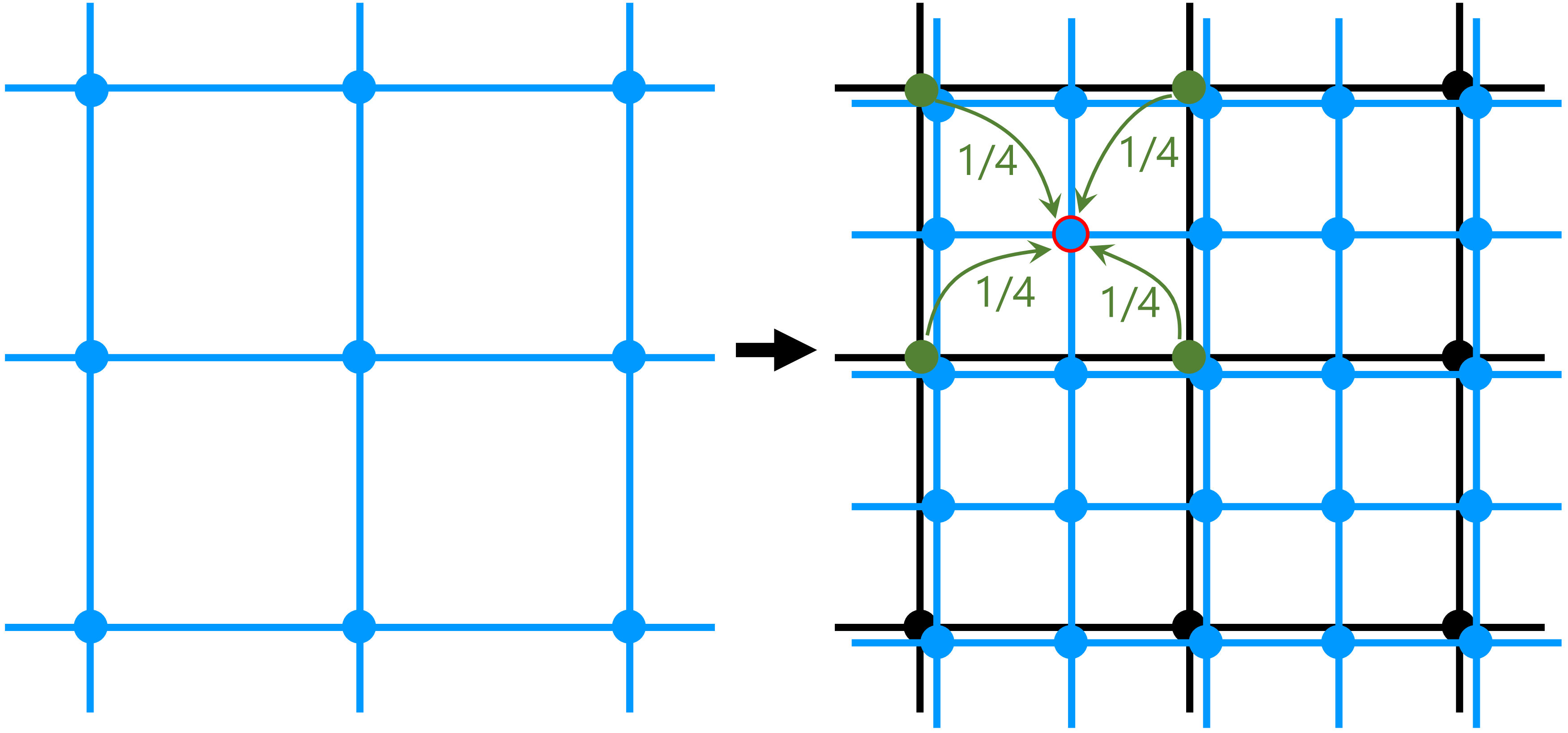


- 各エッジについて、その中点に新しい頂点を生成
- 各頂点を、周囲の頂点と重み付け平均した位置に動かす

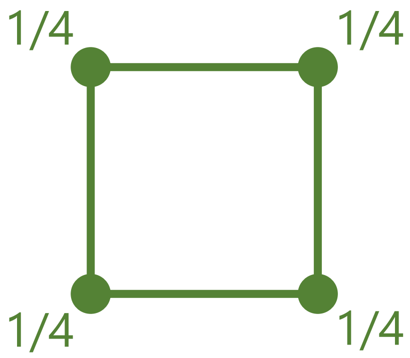
サブディビジョンによる 3次曲面の生成

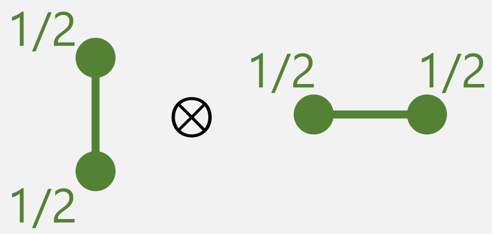


双3次基底関数
$B_{3,3}(s,t) = B_3(s)\,B_3(t)$



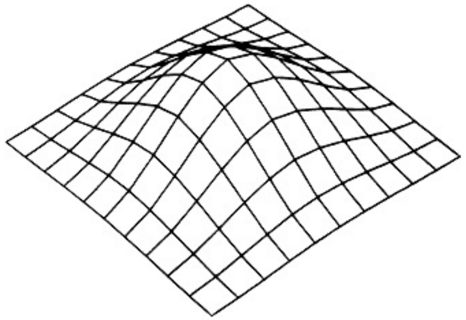
“face point” ステンシル



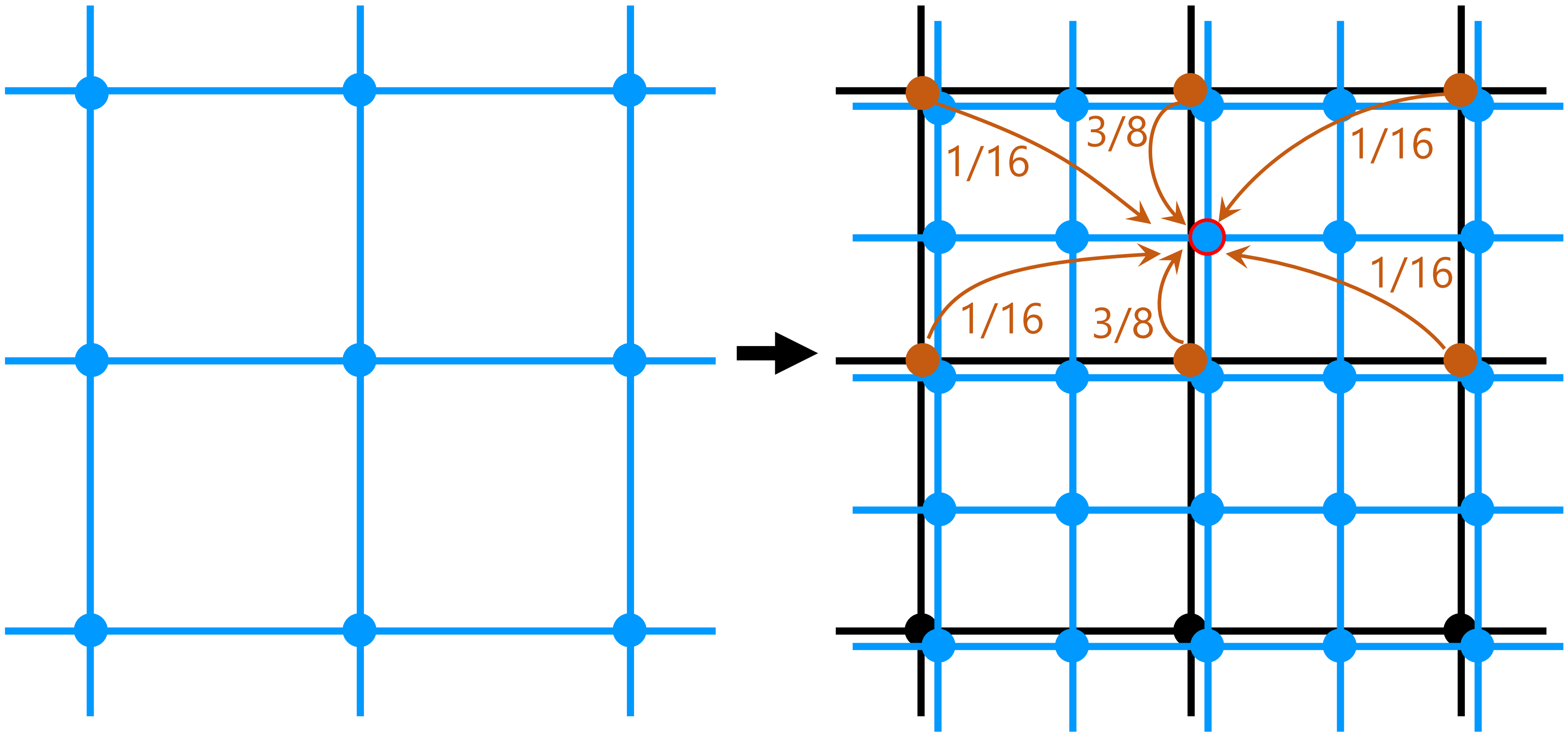


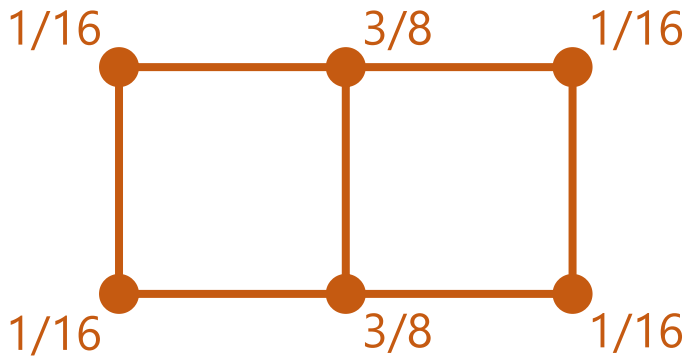
- 各面について、その重心に1個の頂点を生成

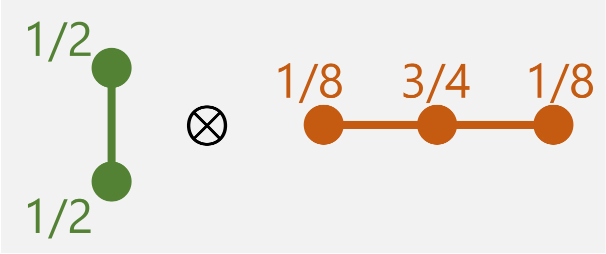
サブディビジョンによる3次曲面の生成



双3次基底関数
$B_{3,3}(s,t) = B_3(s)\, B_3(t)$

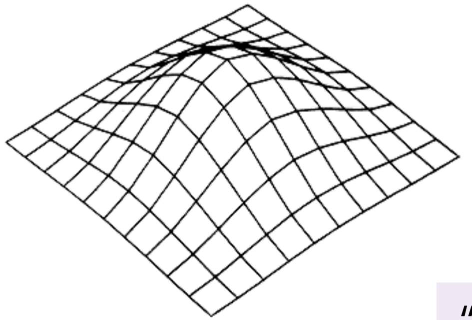




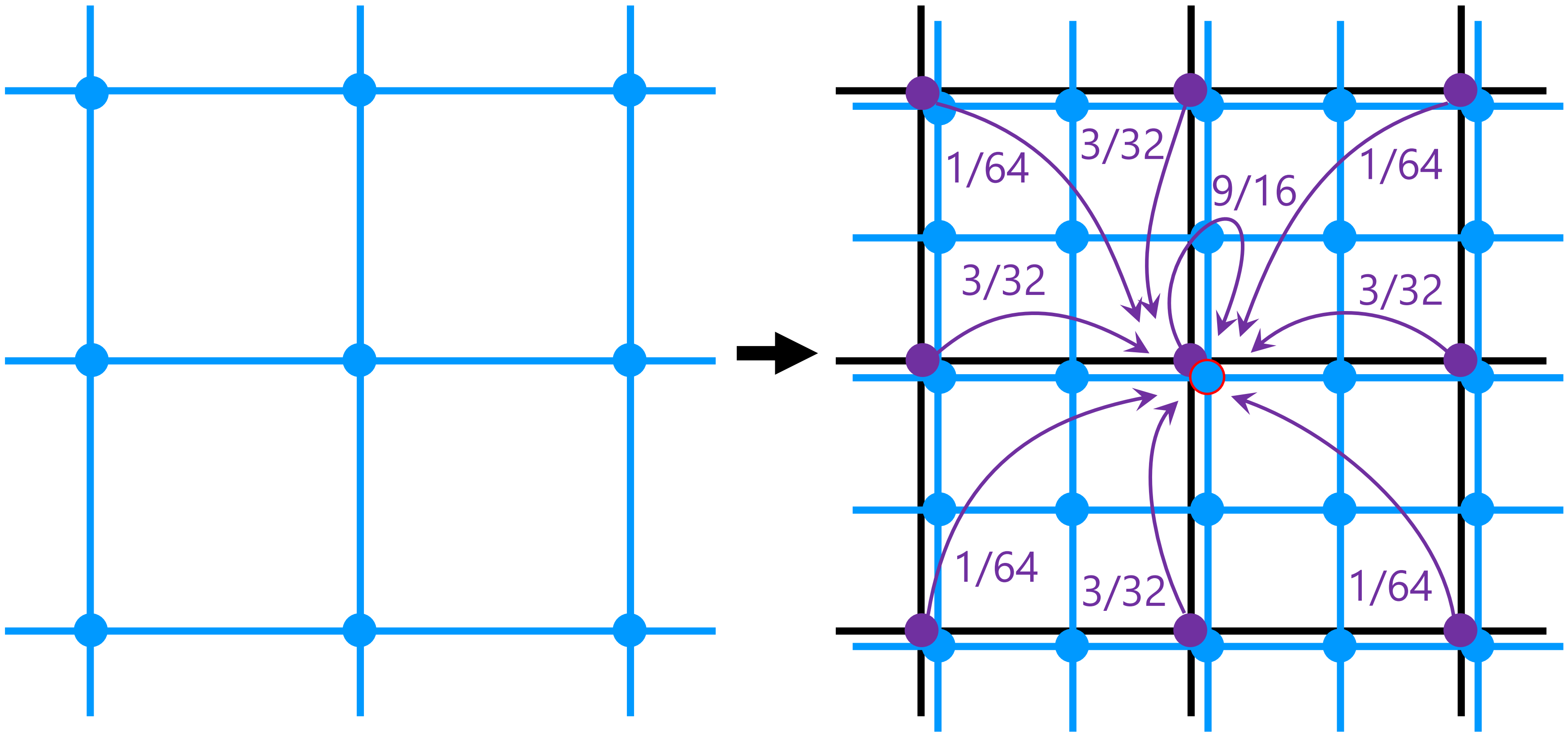


- 各エッジについて、周囲の頂点を重み付き平均した位置に新しい頂点を生成

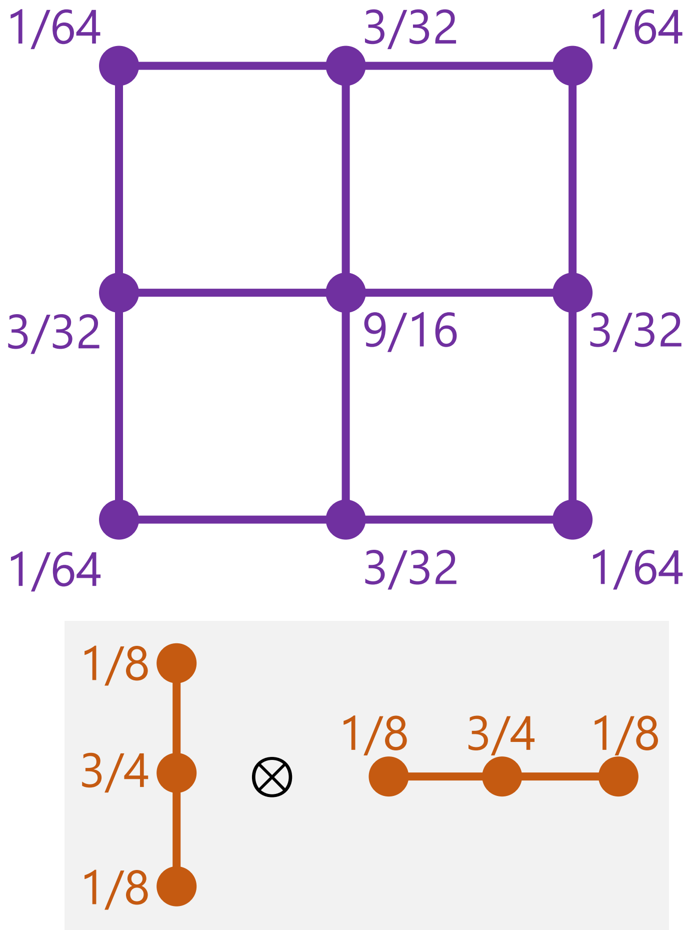
サブディビジョンによる 3次曲面の生成



双3次基底関数
$B_{3,3}(s,t) = B_3(s)\, B_3(t)$

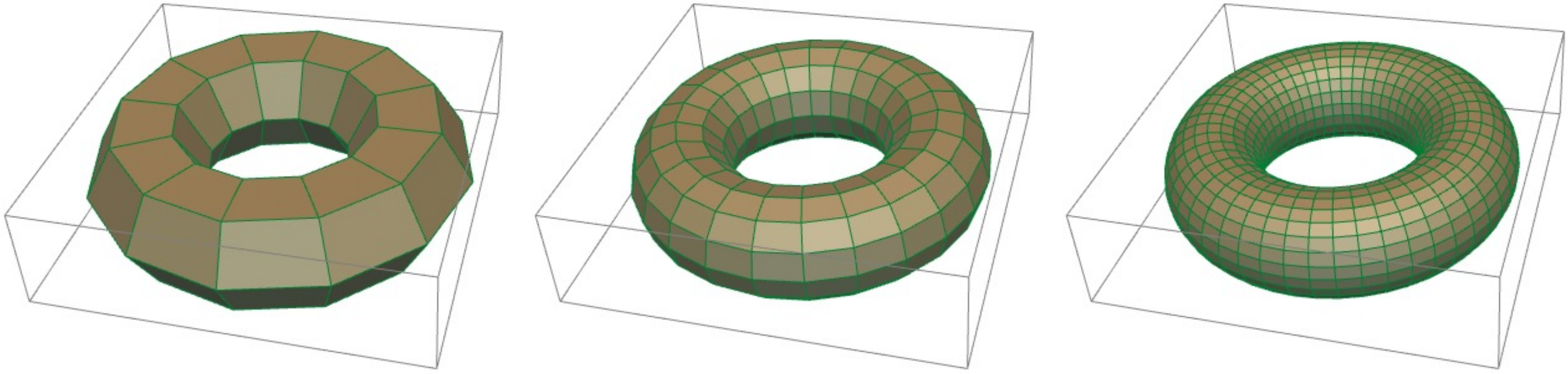


"vertex point" ステンシル



- 各頂点を、周囲の頂点を重み付き平均した位置に動かす

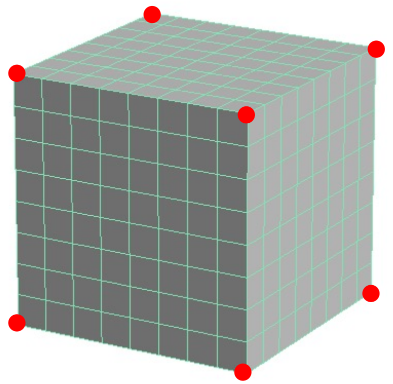
トーラス形状への適用結果



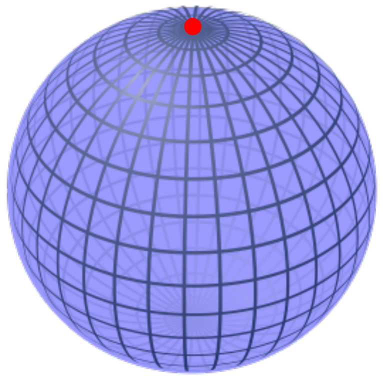
サブディビジョンの一般化

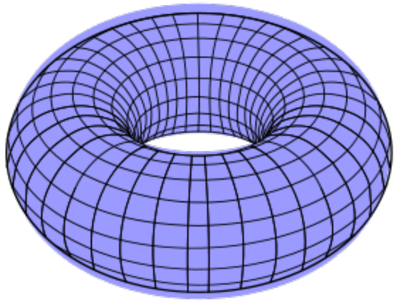
先述の定式化の前提条件

- サーフェスを「きれいな」四角形メッシュに分割できること
  - 「きれいな」頂点：隣接する面の数 (valence) が4つ
    - valence が4でない頂点：特異点



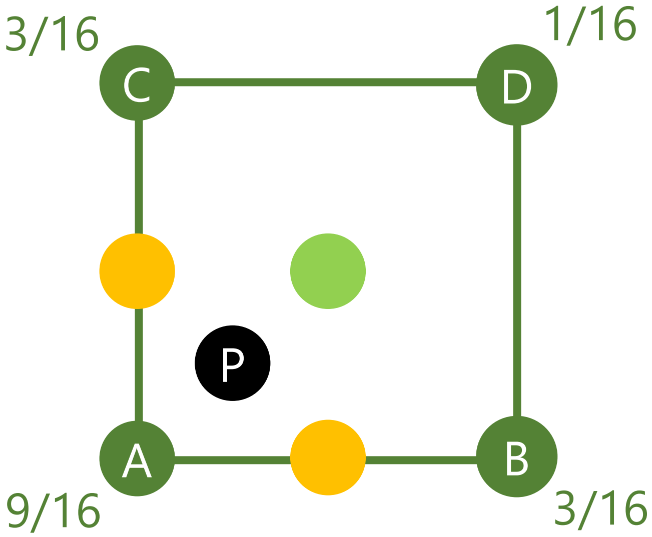
- 特別な場合 (トーラス) を除き、一般には成り立たない





- サブディビジョン法のポイント：特異点にも適用可能
  - Bスプラインから導出されるステンシルを、幾何的な解釈から一般化

2次曲面ステンシルの一般化 (Doo-Sabin法)



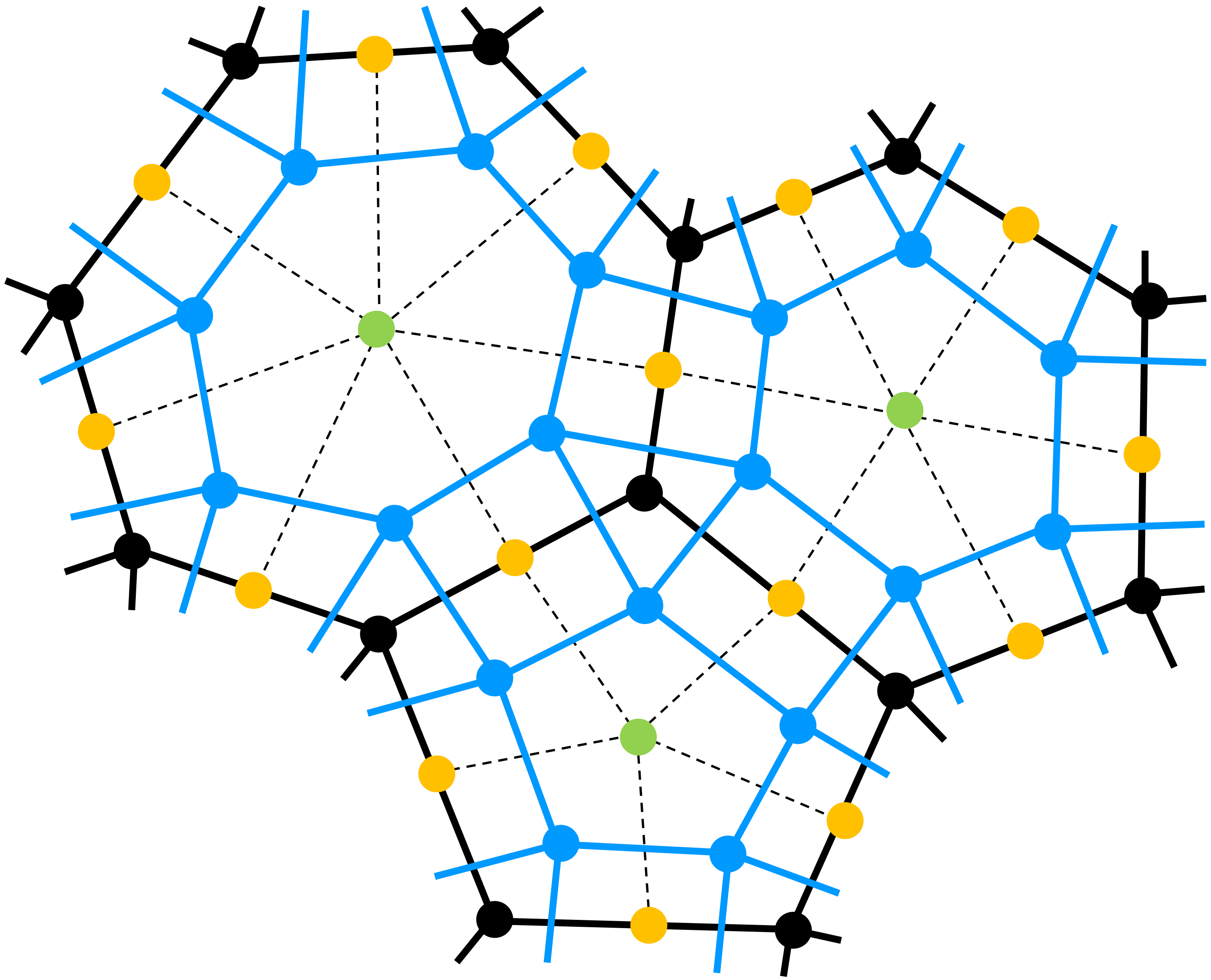
$$P = \frac{1}{16}(9\,A + 3\,B + 3\,C + D)$$

$$= \frac{\underbrace{\frac{A+B+C+D}{4}}_{\text{重心}} + \underbrace{\frac{A+B}{2}}_{\text{中点}} + \underbrace{\frac{A+C}{2}}_{\text{中点}} + A}{4}$$

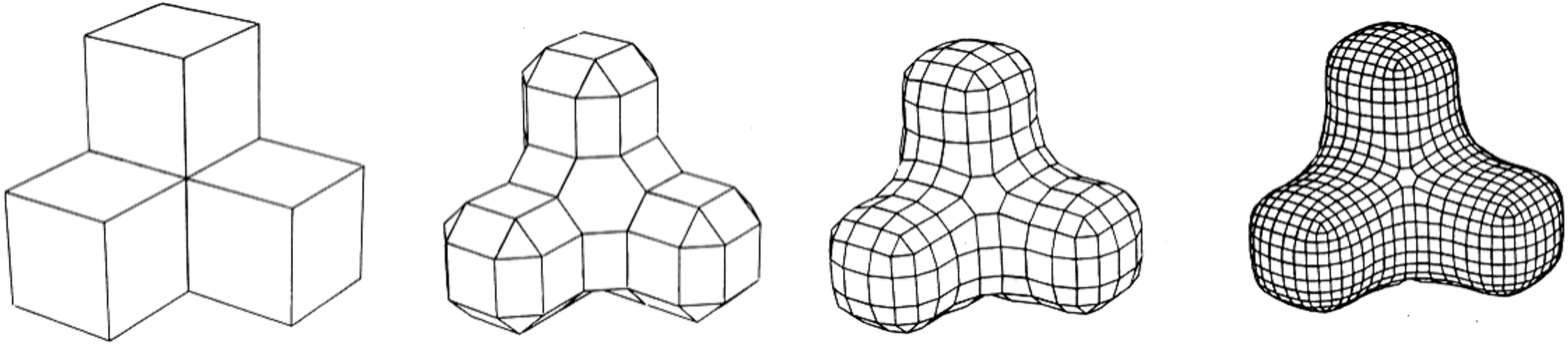
各ポリゴンの各頂点について、それに隣接する2個のエッジの中点と、ポリゴンの重心と、それ自身の平均を取った位置に頂点を生成

➔ 一般のポリゴンメッシュに適用できる

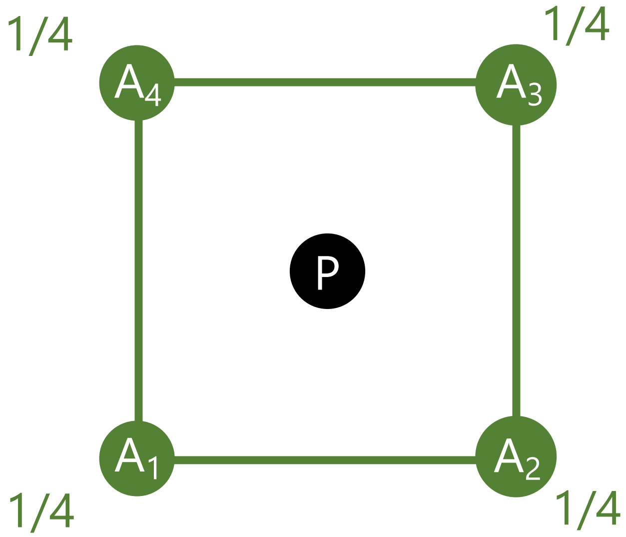
Doo-Sabin法の適用例



Doo-Sabin法の適用例



3次曲面ステンシルの一般化 (Catmull-Clark法)

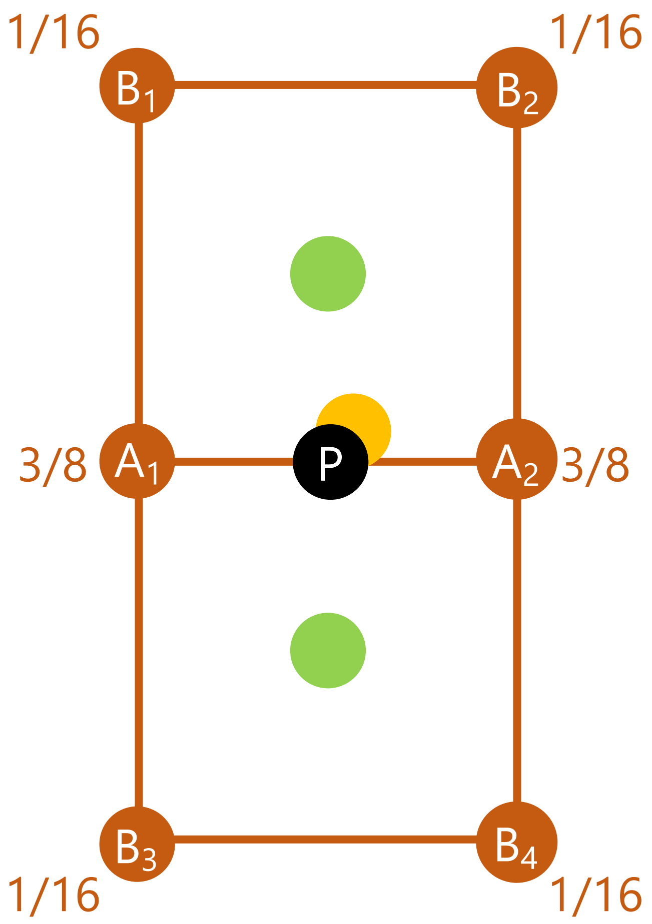


$$P = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}$$

各ポリゴンについて、その重心に頂点を生成

➔ 一般のポリゴンメッシュに適用できる

3次曲面ステンシルの一般化 (Catmull-Clark法)



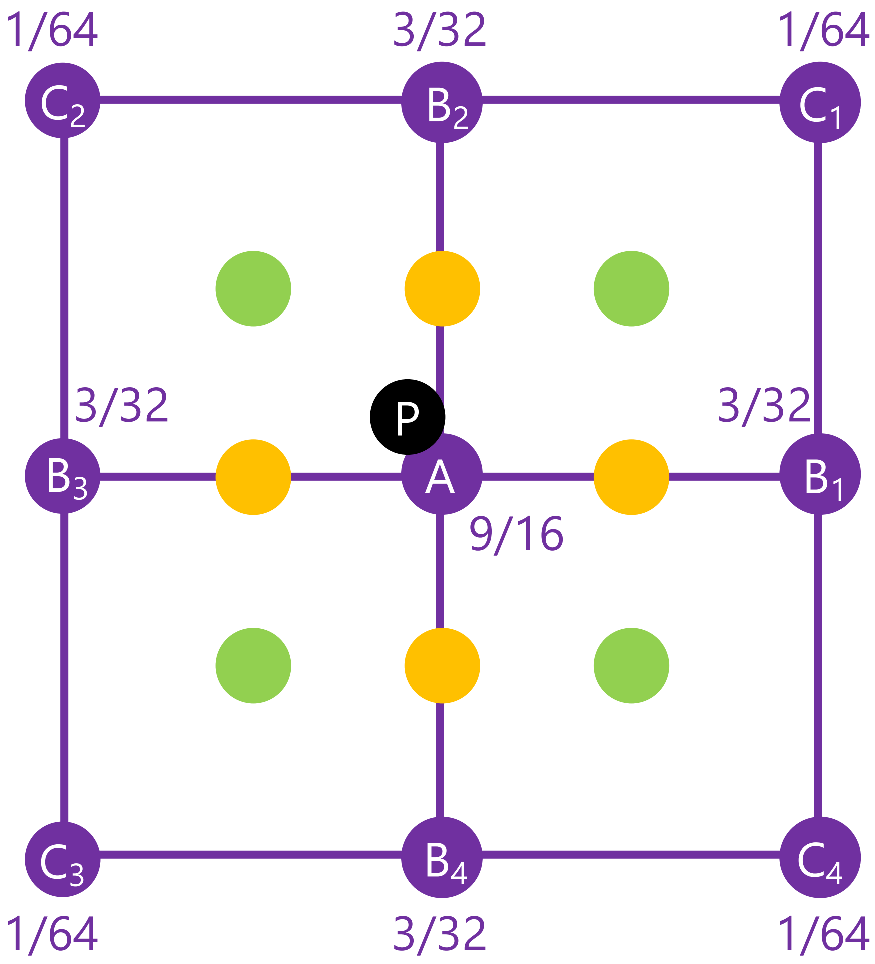
$$P = \frac{3}{8}(A_1 + A_2) + \frac{1}{16}(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)$$

$$= \frac{\dfrac{\overbrace{\dfrac{A_1 + A_2 + B_1 + B_2}{4}}^{\text{重心}} + \overbrace{\dfrac{A_1 + A_2 + B_3 + B_4}{4}}^{\text{重心}}}{2} + \overbrace{\dfrac{A_1 + A_2}{2}}^{\text{中点}}}{2}$$

各エッジについて、それを共有する両側のポリゴンの重心の平均と、それ自身の中点の平均を取った位置に頂点を生成

➔ 一般のポリゴンメッシュに適用できる

3次曲面ステンシルの一般化 (Catmull-Clark法)



$$P = \frac{9}{16}A + \frac{3}{32}(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) + \frac{1}{64}(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{\overbrace{\frac{A + B_1 + C_1 + B_2}{4}}^{\text{重心}} + \overbrace{\frac{A + B_2 + C_2 + B_3}{4}}^{\text{重心}} + \overbrace{\frac{A + B_3 + C_3 + B_4}{4}}^{\text{重心}} + \overbrace{\frac{A + B_4 + C_4 + B_1}{4}}^{\text{重心}}}{4}\right\} \quad Q$$

$$+ \frac{2}{4}\left\{\frac{\overbrace{\frac{A + B_1}{2}}^{\text{中点}} + \overbrace{\frac{A + B_2}{2}}^{\text{中点}} + \overbrace{\frac{A + B_3}{2}}^{\text{中点}} + \overbrace{\frac{A + B_4}{2}}^{\text{中点}}}{4}\right\} \quad R$$

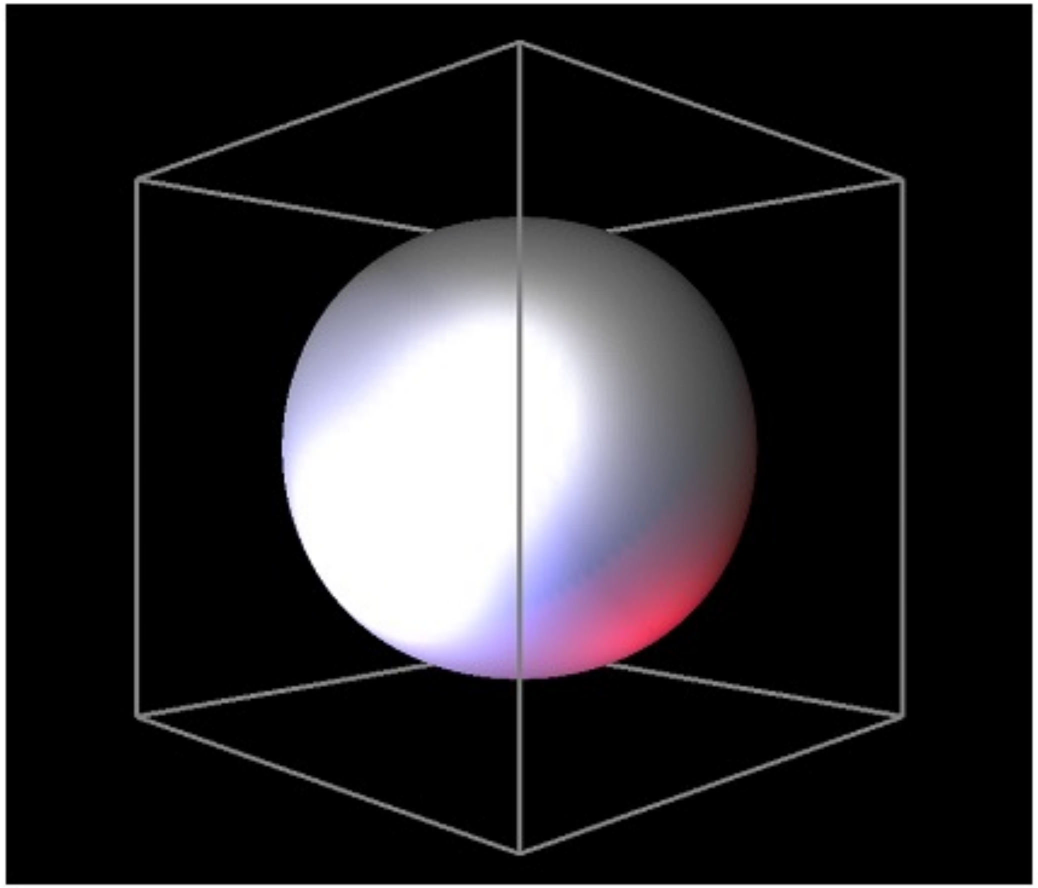
$$+ \frac{1}{4}A$$

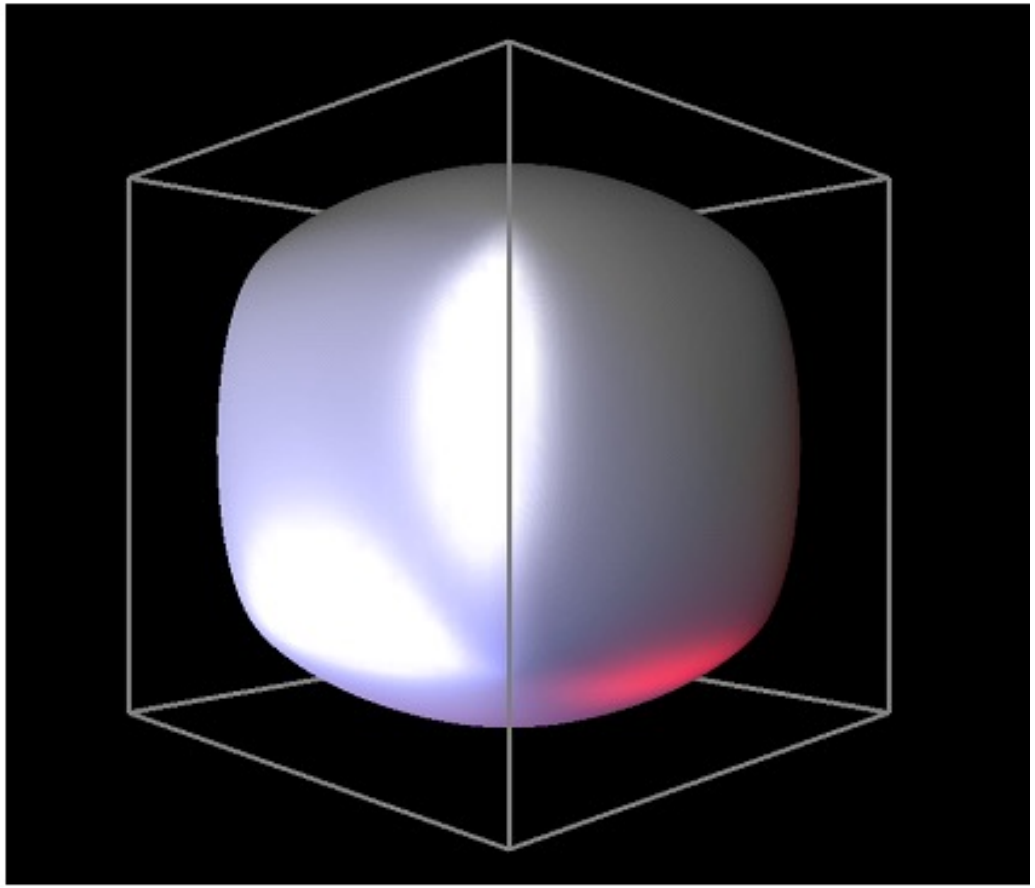
A の valence が n のとき、

$$P = \frac{1}{n}Q + \frac{2}{n}R + \frac{n-3}{n}A$$

➔ 一般のポリゴンメッシュに適用できる

比較

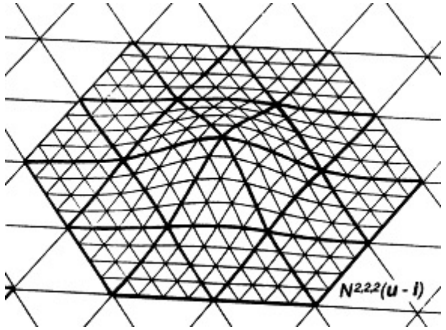


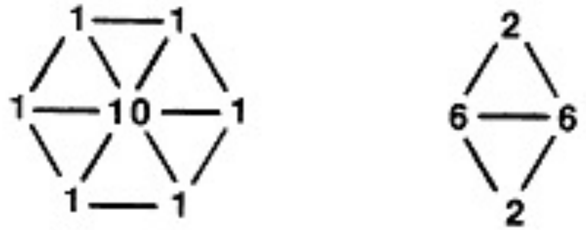


Catmull-Clark =3次曲面　　　　*Doo-Sabin*=2次曲面

三角形メッシュのサブディビジョン (Loop法)

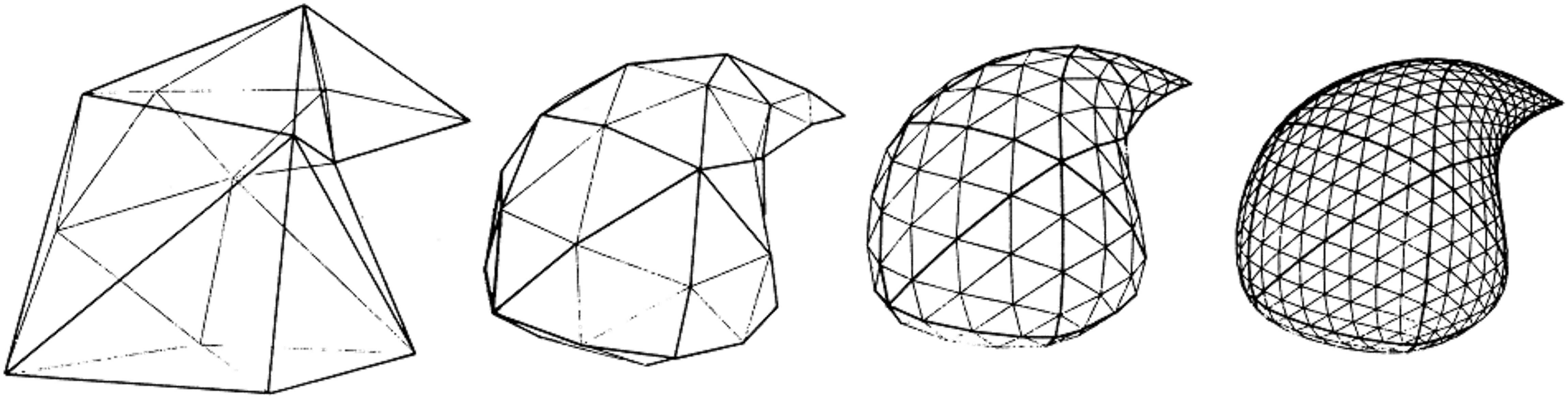
- 三角形格子上のBスプライン に基づいて設計



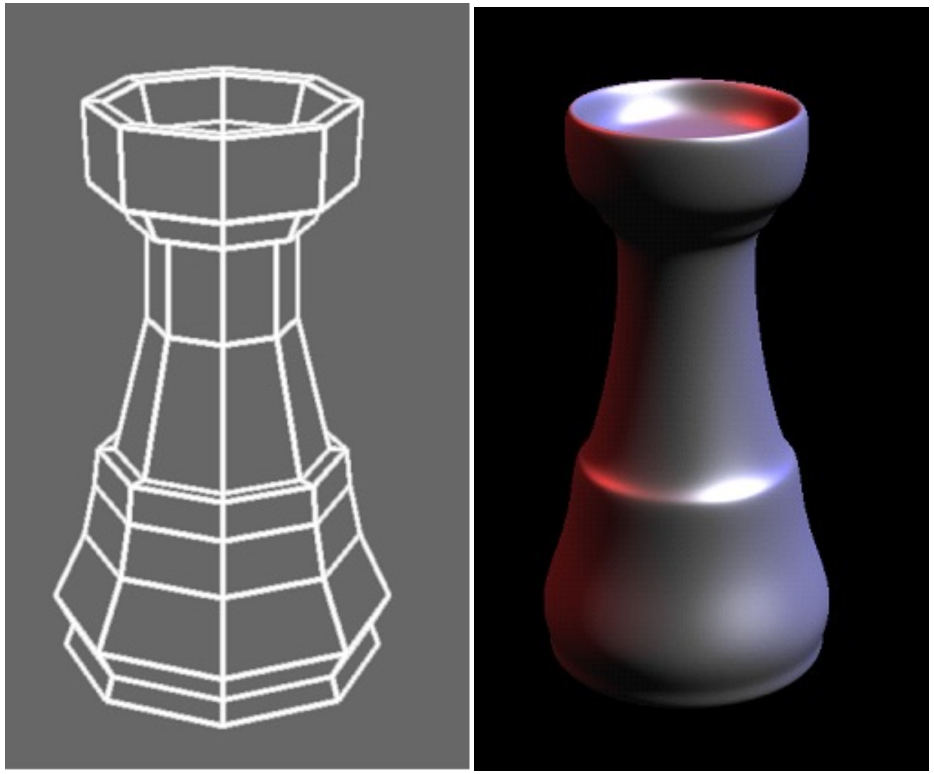


頂点のvalenceが6でない場合
➔難解な理論に基づいた式 (Loopの論文を参照)

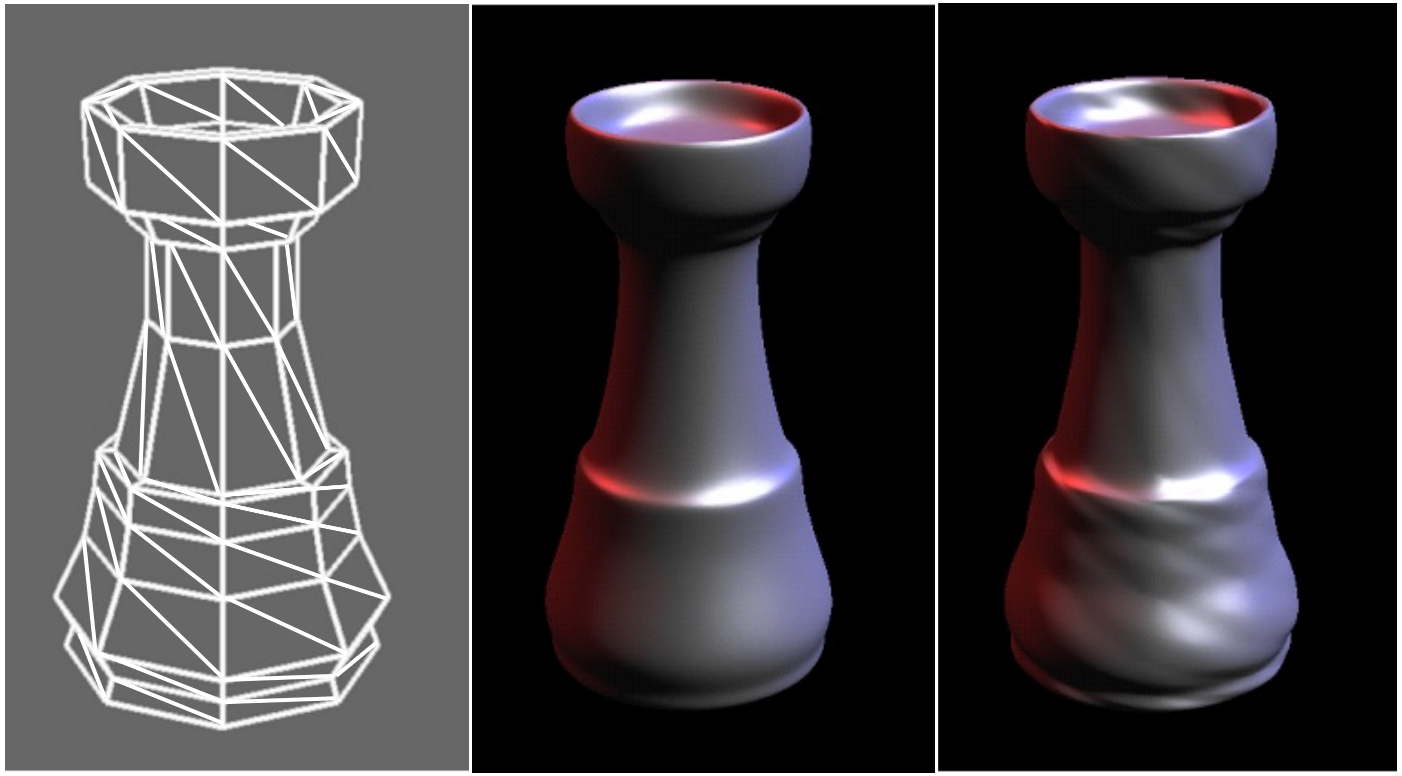
- 特異点以外ではC^2連続な3次曲面



Catmull-Clark法とLoop法の比較



Catmull-Clark



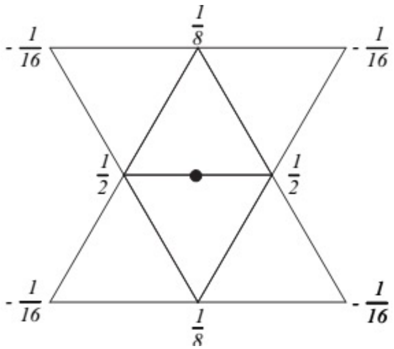
Loop　Catmull-Clark

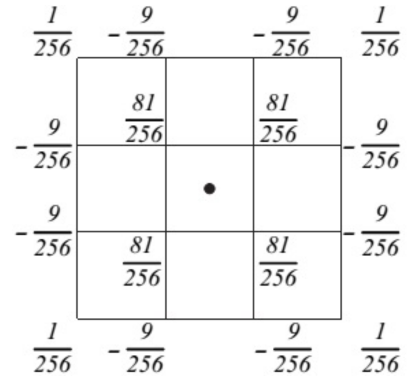
- CG業界ではCatmull-Clark法が圧倒的にポピュラー
  - 四角形メッシュだと二つの主曲率方向を自然に表せる

その他のサブディビジョン手法

- Four-point法
  - 制御点を通る (interpolating)
    - ←→ approximating
  - 多項式として表現できない (？)
  - C^1連続
  - 曲面バージョン：Butterfly法

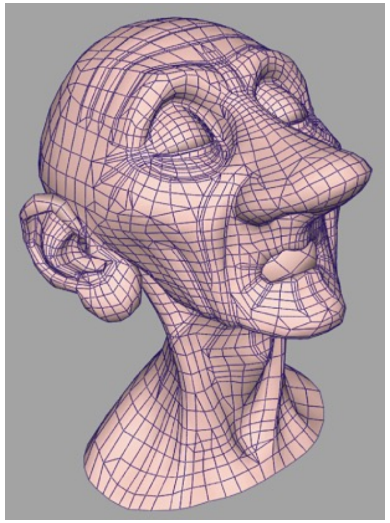
- この他にも亜種が多数存在
  - Kobbelt法
  - √3法
  - etc…





Geri’s Game (Pixar, 1997)

- サブディビジョンを使った最初の映画
  - それ以前 (Toy Story) はBスプラインで多大な労力をかけていた

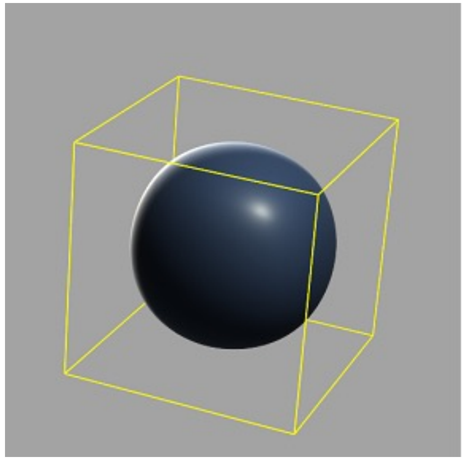


https://www.youtube.com/watch?v=9IYRC7g2ICg

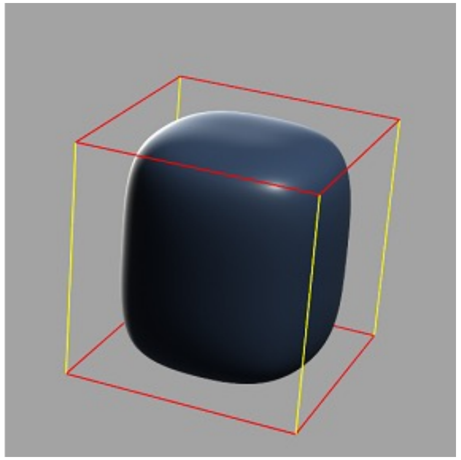
Subdivision surfaces in character animation [DeRose,Kass,Truong,SIGGRAPH98]

滑らかさの制御

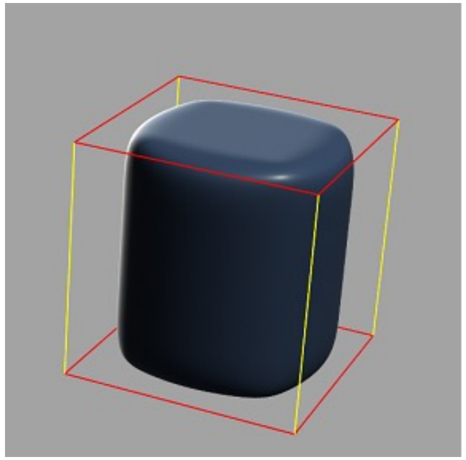
- サブディビジョンのルールを少し変えると、鋭いエッジを表現できる



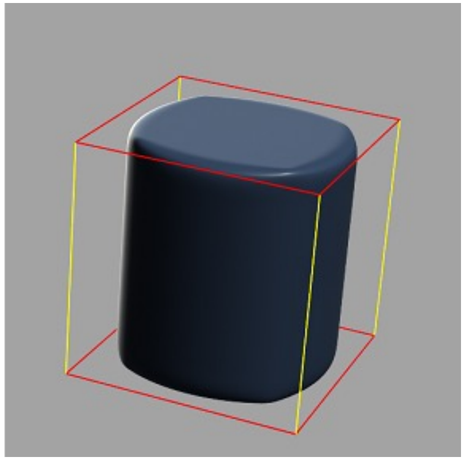
sharpness=0



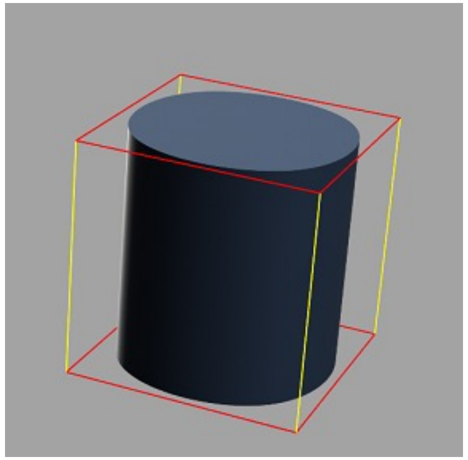
sharpness=1



sharpness=2



sharpness=3

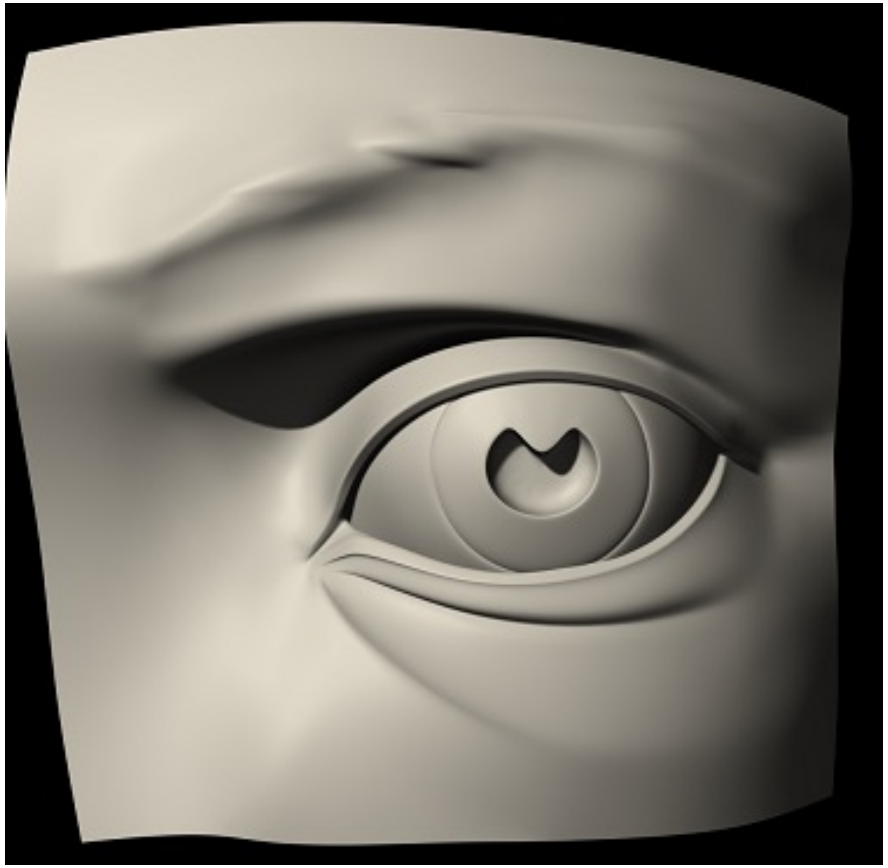


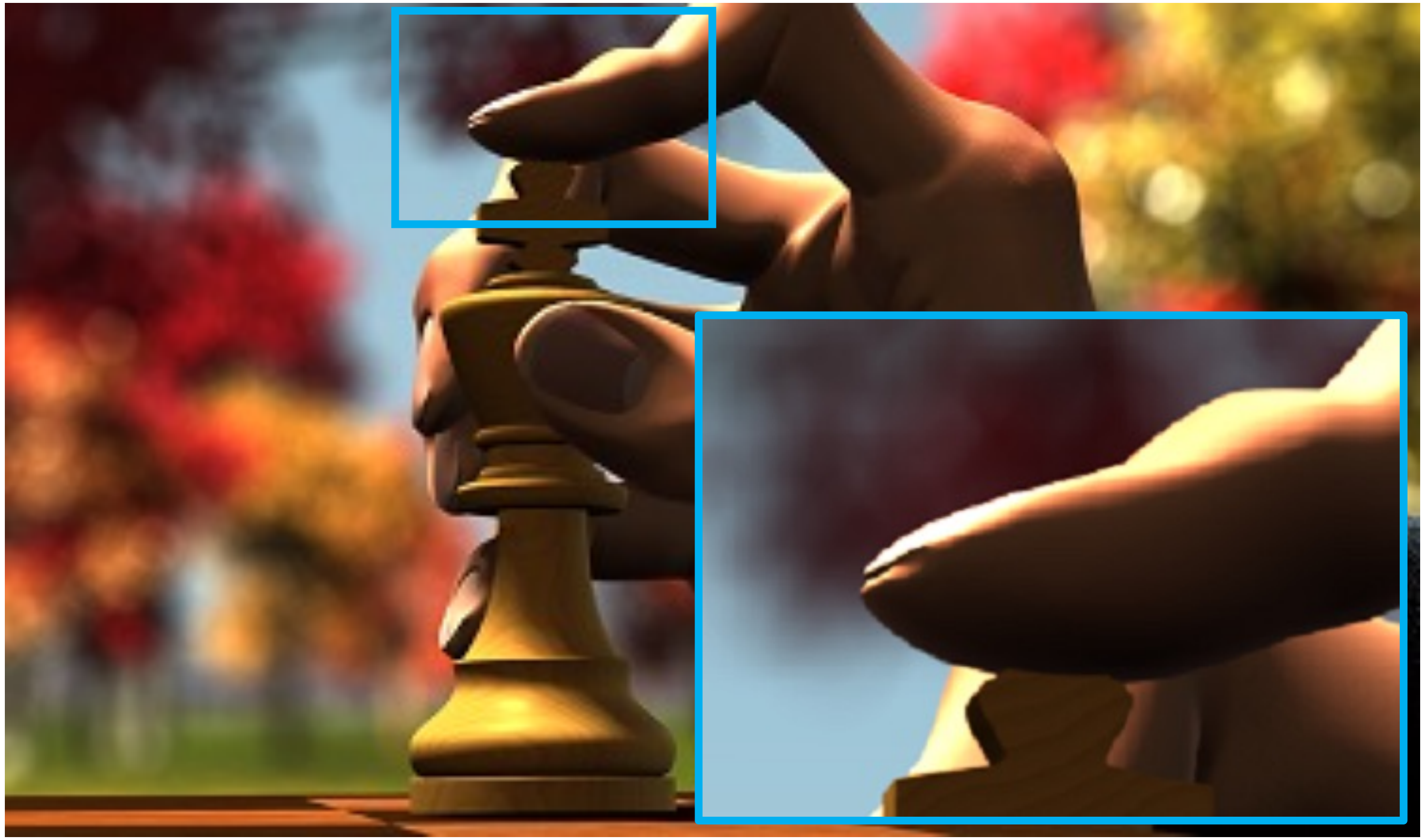
sharpness=∞

Subdivision surfaces in character animation [DeRose,Kass,Truong,SIGGRAPH98]

滑らかさの制御

- サブディビジョンのルールを少し変えると、鋭いエッジを表現できる





Subdivision surfaces in character animation [DeRose,Kass,Truong,SIGGRAPH98]

サブディビジョンの解説資料

- Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles [Loop, MSc. Thesis 87]
  - Doo-Sabin法やCatmull-Clark法を含め、考え方を丁寧に図解
  - 間違いがあるので注意：http://www.cs.berkeley.edu/~sequin/CS284/TEXT/LoopErrata.txt
- Subdivision for Modeling and Animation [SIG00 Course]
  - サブディビジョンの概説としては最も有名。でも微妙に難解
  - http://www.cs.nyu.edu/~dzorin/sig00course/
- OpenSubdiv from research to industry adoption [SIG13 Course]
  - http://dx.doi.org/10.1145/2504435.2504451
- CEDEC2015 サブディビジョンサーフェスの すべてがわかる
  - https://docs.google.com/presentation/d/1mOjFkOkGmZWMiYTOJNRfU_zCbTxUdr2hIDaXE65pxDU
  - OpenSubdivの開発に携わった手島 孝人氏による解説

ハーフエッジデータ構造

頂点リストと面リストによるメッシュ表現

OFF file format

```
OFF
8 6 0
-0.5 -0.5 0.5
0.5 -0.5 0.5
-0.5 0.5 0.5
0.5 0.5 0.5
-0.5 0.5 -0.5
0.5 0.5 -0.5
-0.5 -0.5 -0.5
0.5 -0.5 -0.5
4 0 1 3 2
4 2 3 5 4
4 4 5 7 6
4 6 7 1 0
4 1 7 5 3
4 6 0 2 4
```

ジオメトリ情報

トポロジ情報

← 頂点数、面数

← 0番目の頂点の xyz 座標

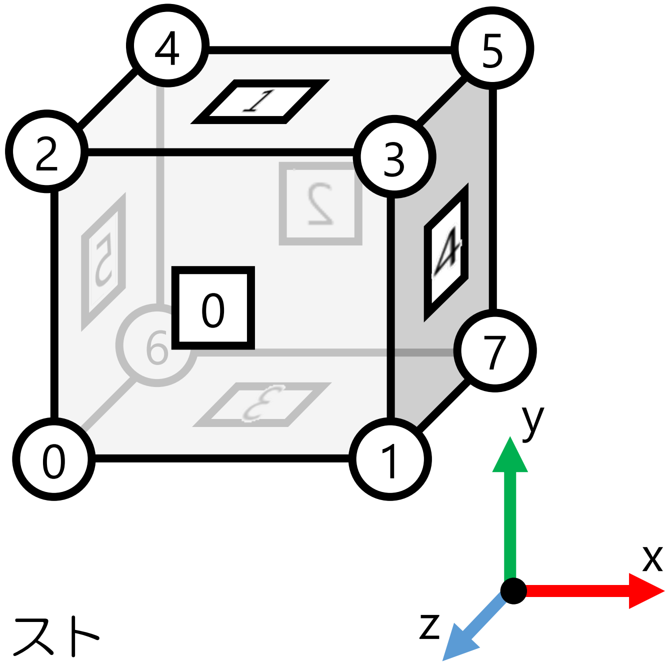
⋮

← 7番目の頂点の xyz 座標

← 0番目の面の頂点数と頂点インデックスリスト

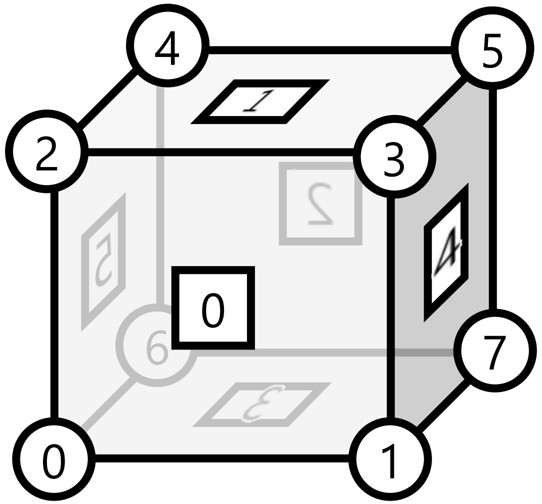
⋮

← 5番目の面の頂点数と頂点インデックスリスト



頂点リストと面リストによるメッシュ表現

- メッシュ処理 (サブディビジョン等) で使う情報
  - ある頂点に隣接する頂点の集合
  - ある面に隣接する面の集合
  - あるエッジの両端の頂点
  - あるエッジの両側の面
  - etc…



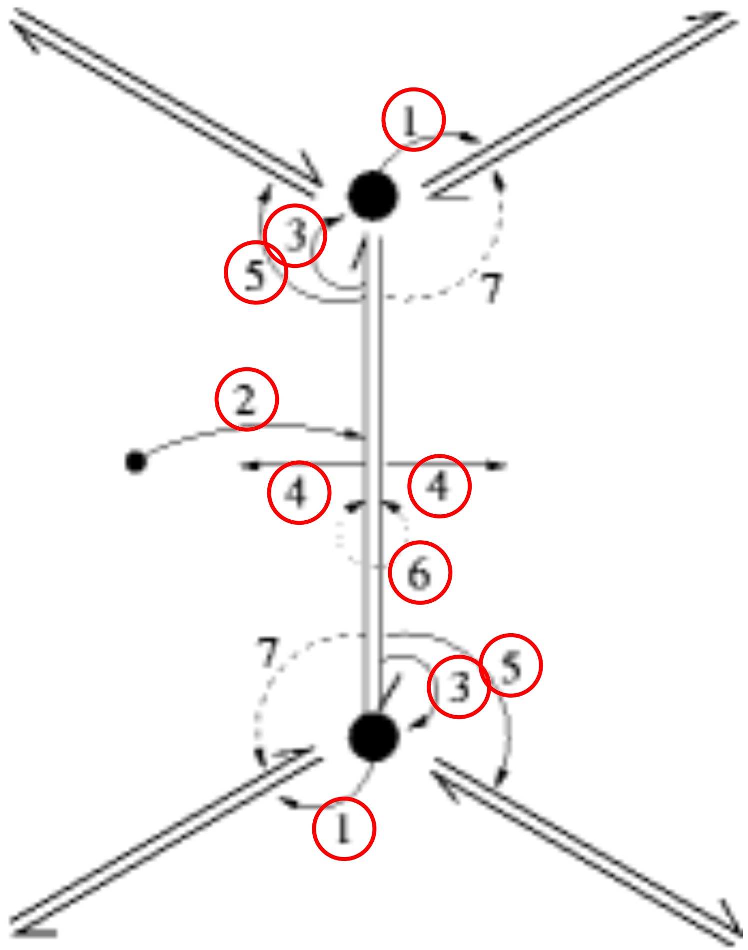
- 「配列の配列」で保持しても良いが、メモリ消費が大きい ☹

ハーフエッジデータ構造

- リンク情報を保持：
  (1) 頂点→その頂点から出るハーフエッジの一つ
  (2) 面→その面を構成するハーフエッジの一つ
  (3) ハーフエッジ→行き先の頂点
  (4) ハーフエッジ→それが構成する面
  (5) ハーフエッジ→次のハーフエッジ
  (6) ハーフエッジ→反対側のハーフエッジ

- ある面の周りの要素をループ：
  (2) → (5) → (5) → ...

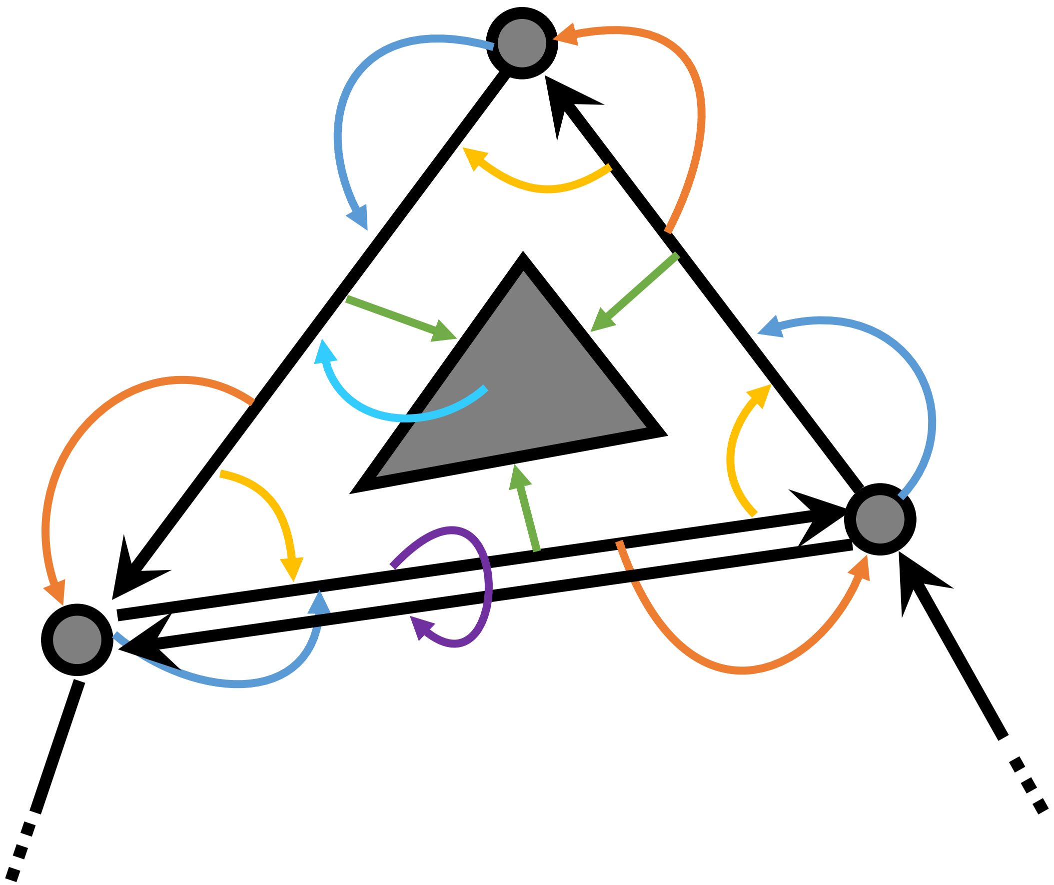
- ある頂点の周りの要素をループ：
  (1) → (6) → (5) → (6) → (5) → ...



http://www.openmesh.org/

面を追加する際の処理

- ハーフエッジを生成
- 頂点→ハーフエッジをリンク (1)
- ハーフエッジ→頂点をリンク (3)
- 次のハーフエッジをリンク (5)
- ハーフエッジ→面をリンク (4)
- 面→ハーフエッジをリンク (2)
- ハーフエッジ→反対向きのハーフエッジを探してリンク (6)



論文

- Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes [Catmull,Clark,CAD78]
- A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design [Dyn,Levin,CAGD87]
- A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control [Dyn,Levine,Gregory,TOG90]
- Sqrt(3)-subdivision [Kobbelt,SIGGRAPH00]
- Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values [Stam,SIGGRAPH98]
- Interactive multiresolution mesh editing [Zorin,Schroder,Sweldens,SIGGRAPH97]
- Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology [Zorin,Schroder,Sweldens,SIGGRAPH96]